多世界パラダイムに基づくわり算概念の構成とその学習指導の改善に関する研究

Research on children's construction of division concepts and improving its teaching based on the multi-world paradigm

環太平洋大学名誉教授
中原　忠男
NAKAHARA, Tadao
Professor Emeritus
International Pacific University

次世代教育学部教育経営学科
前田　一誠
MAEDA, Kazushige
Department of Educational Administration
Faculty of Education for Future Generations

鹿児島大学教育学系
山口　武志
YAMAGUCHI, Takeshi
Kagoshima University
Research Field in Education

岡山大学大学院教育学研究科
岡崎　正和
OKAZAKI, Masakazu
Okayama University
Graduate School of Education

広島大学大学院教育学研究科
影山　和也
KAGEYAMA, Kazuya
Hiroshima University
Graduate School of Education

キーワード：算数教育，わり算概念，構成主義，相互作用主義，達成度

Abstract：While division is one of the crucial concepts in elementary mathematics, it is hard to understand it. Thus, various research tasks have been tackled so far. We as a research team have investigated the following three tasks: 1) developing the survey which consists of a set of problems that enable to clarify the actual conditions of children's construction of division concepts comprehensively and systematically, 2) revealing the actual conditions of children's construction of division concepts based on the survey, and raising the research tasks on the teaching and learning of division, and 3) through examining those research tasks, proposing our alternatives for improving the teaching and learning of division concepts based on multi-world paradigm.

In this paper we propose our final research findings by reflecting on our whole studies until now in a comprehensive way according to the following three steps. First, we give a general description of the perspective of multi-world paradigm as our theoretical background. Next, we overview our research results on the above 1) and 2) which have already been published. Finally we examine our alternatives for improving the teaching and learning based on the multi-world paradigm, which will become our final research findings, where we will emphasize the importance of meaning-construction and tool-construction on division concepts.

Keywords：Arithmetic Education, Division concept, Constructivism, Interactionism, Achievement

Ⅰ．問題の所在と本研究の目的・方法

1．問題の所在

わり算は四則演算の１つであり，算数教育における重要な学習内容である。しかし，その概念形成は子どもたちにとって容易ではなく，いろいろな課題が指摘されてきている（日本数学教育学会算数教育編集部，2005；向山，2006；渡会，2011；筑波大学附属小学校算数教育研究部，2013　など）。

例えば，平成22年度の文部科学省による学力調査で次の問題が出されており，その正答率は「54.1%」である（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2012，pp.123-124）。

> ８mの重さが４kgの棒があります。この棒の１mの重さは何kgですか。求める式と答えを書きましょう。

このことは小学校６年生においてもわり算概念が十分に形成されていないことを示している。こうした状況を受けて，「商が１より小さくなる等分除『(整数)÷（整数)』の場面で，除法が用いられることの理解に課題がある」という指摘がなされている（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2012，p.28)。

上記は一例であり，わり算に関する課題は他にもいろいろある。後述するように，それらに対する改善策もいくつか研究，提案されてきているけれども，なお十分な成果は挙げられていない。

その要因として，これまでの研究はピンポイント的で表面的な改善策にとどまっていたことが挙げられる。わり算概念には様々な要素が関わっており，それ故にその指導の改善については，部分的にではなく，総合的・体系的に取り組み，深層に至る改善が求められると考える。

2．本研究の目的・方法

上記のようなわり算の学習状況の現状を踏まえて，本研究は下記の３点を目的とするものである。

①わり算概念の構成の実態を明らかにできる総合的・体系的な調査問題を開発する。

②それによる調査に基づいて，わり算概念の構成の実態を解明するとともに，わり算の学習指導の課題を明確化する。

③上記の課題を踏まえて，多世界パラダイムに基づいてわり算概念の学習指導の改善策を構築する。

①については，これまでの内外における先行研究による調査問題を，本研究の理論的基盤である多世界パラダイムに基づいて検討を加え，本研究の目的に即した総合的な調査問題を開発・作成していく。

②については，複数の県における小学生・中学生を対象とした調査を実施し，それを総合的・体系的に検討，分析し，課題を明確化する。

③については，それらの課題について，多世界パラダイムの視点から，要因や改善策を理論的に検討し，授業実践を通して，学習指導の改善策を構築していく。

本稿は本研究の総括的報告，最終的考察を行うものである。そこで以下においては，まず本研究の理論的基盤である多世界パラダイムについて概説する。ついで，すでに論文として発表している①，②の研究結果（山口他，2017；岡崎他，2016）についてその概要を述べる。それらに続いて，多世界パラダイムをもとにして，本研究の最終目的である学習指導の改善策を理論的・実践的に検討，構築していく。

Ⅱ．算数・数学教育の多世界パラダイム

1．３つの認識論の比較検討

算数・数学の主体的学びを支える認識論として，急進的構成主義，相互作用主義，社会文化主義の３つが注目されている。これらの主義の主要な論点を比較検討してみると，以下のように整理することができる。

表１．３つの主義の比較検討

	急進的構成主義	相互作用主義	社会文化主義
認識の本性	個人による構成	仲間との構成	共同体における文化化
知識の主客性	主観的	間主観的	社会的
学習の契機	知的葛藤	社会的相互作用	文化的実践への参加
学習の方法論	社会的相互作用 反省的思考	社会的相互作用	社会的相互作用 道具の活用
教師の役割	学習の支援者	個人と仲間との仲介者	文化の熟達者，教授者

表１から，３つの主義はいずれも子どもが主体的に学習に取り組むことを基本としている点や学習の重要な方法論に社会的相互作用を位置付けている点などで共通性があることが分かる。しかし，他方で認識や知識の本性などで厳しい対立点もある。

2．算数・数学教育の多世界パラダイム

３つの主義は確かに相いれない相異点を有してい

る。しかし，これらに基づく算数・数学教育の研究が進むにつれて，急進的構成主義と相互作用主義は互いに補いあう面があることや，さらには急進的構成主義と社会文化主義は子どもの活動の何処に視点を置くかの違いでもあり，両者はコインの表と裏のような関係にあるということなどが指摘され始めた（Cobb, 1994; Cobb & Bauersfeld, 1995）。

３つの立場は単純化すれば，学習者，他者，文化をそれぞれ重要視して学習を捉えようとしている。これらの３つはいずれも学習活動における基本的要素であり，それらの１つだけを基盤にするとそれぞれの主義に繋がる。しかし，学校における学習活動は３つの基本的要素をすべて重要な要因として含むことから，原理的には相いれない３つの主義を協応させたり，補完したりする立場も考えられてよい。

こうした状況と子どもが知識を認識，構成していく過程の多様性・複雑性に着目して，中原は構成的アプローチ（中原，1995）を発展させて，これらの３つの主義をすべて組み入れた算数・数学教育のパラダイムとして，図１で表される「多世界パラダイム」を提唱した（中原，1999）。これは，算数・数学の授業と子どもの学びの実態をよく捉えているといえる。そこで，本研究においてはこれを理論的な基盤とする。

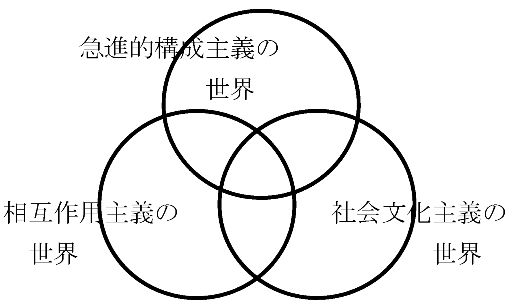


図１．算数・数学教育の多世界パラダイム

３．「構成」，「生存可能」，「理解」等の用語について

構成主義では知識の獲得に関して「構成」という用語を使用する。これは認識主体が自らつくり上げたすべての内容を含んでいる。通常使用される「理解」は，正しい内容の把握を意味しているが，「構成」はそうではない。そこで，構成された知識は適用可能性を問われる。その時点で適用可能な知識は「生存可能(viable)」といわれ，そうでない知識は生存可能な知識に修正されるか，捨てられる。例えば，わり算については当初「大÷小」という知識を構成してしまう子どもが多い。この知識は後に「小÷大」に出会い，適用可能でないことを認識し，捨てられることになる。

なお，以下の調査結果等の記載に関しては分かりやすさから，通常のように「正答」と「誤答」などの用語を使用するが，これらは構成主義の立場からは，数学者世界での「生存可能な解答」，「生存可能でない解答」という意味である。

Ⅲ．わり算概念の調査結果について

１．調査問題の開発・作成

本調査の目的は，小学校において指導されるわり算概念について，小学校５年生から中学校１年生までを対象とした実態調査を行い，わり算概念の構成に関する子どもの実態を明らかにすることである。そこで，以下の３点に留意して調査問題を作成することとした。

①整数のわり算から小数，分数のわり算へと至る，わり算概念の構成の様相を縦断的，横断的に明らかにできる作問
②等分除とその拡張，包含除とその拡張，倍に関わる問題に着目した作問
③正答率に大きな影響を与える問題文の諸条件に着目した作問

具体的には各種の先行研究（Bell et al., 1989; Greer, 1992, 1997; Mulligan & Mitchelmore, 1997）などを参考にしながら，主として，以下のような諸条件に着目して調査問題を開発，作成した。なお，全体として問題数が多くなったので各学年２セットとした。

【問題文の諸条件】

イ）「小÷大」（商が１より小さい）か否か
ロ）被除数や除数の数値の影響，例えば「割り切れやすさ」，「純小数か帯小数か」，「真分数か仮分数か」など
ハ）数値の順序，例えば「被除数と除数の順序」など
ニ）量の種類，例えば「離散量か連続量か」など
ホ）問題文に添えられる図や言葉の式の有無
へ）キーワード（「等分」など）を強調するか否か
ト）問題文の表現，言い回しなど

調査問題や調査結果，その分析等はすでに山口他(2017)，岡崎他（2016）で公表しているので詳細はそれらを参照していただきたい。ここでは，本稿のⅣ章以降に関わる主要な結果について述べていく。

２．主要な調査結果と問題点

（A)「小÷大」や「被除数と除数の順序」を視座とした考察結果

（A１）基礎的な「整数のわり算」において，「わり算の式は，いつも‘大÷小’になる」という考えを構成しており，それで立式したり，問題文に現れる数値の順に単純にわり算の式を立式したりする子どもが中１で，３〜５割近く存在している。

（A２）「分数のわり算」の場合，被除数と除数の順序に関係なく，かけ算の式を立式する子どもが，中１でも，約２割程度存在する。また，問題文に現れる数値の順に単純にわり算の式を立式する子どもが，中１でも，約１割程度存在する。

(B)「倍」の文脈を視座とした考察結果

（B１）「整数のわり算」,「小数のわり算」,「分数のわり算」の問題の正答率は，いずれにおいても，総じて芳しくない。これらの問題の中１における正答率は，５割から６割台にとどまっている。

（B２）中１においても，約３割の子どもが，「整数のわり算」,「小数のわり算」,「分数のわり算」を問わず，「○の□倍」という文言に引きずられて，かけ算で誤って立式している。

(C)「除数の数」を視座とした考察結果

（C１）「小数のわり算」では，除数が帯小数か純小数かによって，次のような誤答の傾向がある。

①除数が１より大きい「÷帯小数」の場合，整数部分によって，わり算の演算決定は比較的容易になるが，被除数と除数の決定において困難を抱える傾向にある。

②「÷純小数」では，「÷帯小数」よりもわり算の演算決定自体が相対的に困難になり，その結果，かけ算の式を立式してしまう傾向にある。

（C２）「分数のわり算」について，除数の数のタイプ別の正答率は中１においては次のとおりである。

「分数÷整数」（正答率64％）

⬇　－12ポイント

「分数÷単位分数」

⬇　－６〜７ポイント

「分数÷分数一般（逆)」および「分数÷帯分数（逆)」

〔注：「逆」とは，問題文において「除数➡被除数」の順に数が現れる問題〕

（C３）「分数のわり算」では，除数の数値によって，次のような誤答の傾向がある。

①「分数÷整数」や「分数÷帯分数」では，わり算の演算決定は典型的な「分数のわり算」などよりも相対的に容易になるが，被除数と除数を逆にした誤答が相対的に増加する。

②「分数÷単位分数」や典型的な「分数÷分数」では，わり算の演算決定自体が「分数÷整数」などよりも相対的に困難になり，その結果，かけ算の式を立式する誤答が相対的に増加する。

上記の結果から，わり算指導にはなお大きな課題があることを改めて認識させられた。それを要約すると次の３点になる。

①小学校高学年や中１においても子どもなりに構成した誤りの克服を意識した学習指導の改善

②「倍」の文脈に関するわり算の学習指導の改善

③「演算決定」および「被除数と除数の決定」に注目した学習指導の改善

とりわけ，算数の指導を終えた「中１」において，なお多くの問題点があることは重大である。それを示すことができたのは本調査の重要な成果といえる。

Ⅳ．わり算概念の修正・拡張の基本的な方策の検討

１．多世界パラダイムに基づく調査結果の考察

まず，ここでは本研究の理論的基盤である多世界パラダイムをもとに，調査結果の深層的要因や改善策の手がかりを考察していく。

認識論の１つである急進的構成主義においては，先にも述べたように，認識主体は自らの経験や様々な情報に基づいて，自ら知識を構成していくと捉えている。構成した知識は，一般的にいえば正しいものもあるし，誤りであるものもある。

わり算の学習でいえば，授業を通して子どもたちはわり算概念を自ら構成していくが，その中には算数的にみて誤りであるものもある。先の調査結果で示された，主要な誤りとして以下のものが挙げられる。（用語は数学の用語で記す。）

①わり算は大きい数を小さな数でわる。

②除数は整数である。（等分除）

③商は整数である。（包含除）

④商は被除数よりも小さい。

⑤先に記してある数を後に記してある数でわる。

⑥除数が単位分数や真分数だとわれないと考え，か

け算とする。

⑦除数が純小数だとわれないと考え，かけ算とする。

⑧「○の□倍」という文言があるとかけ算とする。

これらは通常は理解が不十分として扱われることが多いが，急進的構成主義ではそう単純には捉えない。これらは子ども自らがしっかりとした根拠に基づいてつくり上げた考えであり，信念となっており，これを修正するのは容易でないと受け止めている。近年，暗黙のモデル，原型現象，ミスコンセプションなどと指摘されているもの，あるいはそれ以上に根深いものがあることを教師は認識する必要がある。

上記のような考えを子どもたちが何故つくり上げるか，それには大きく２つの理由がある。１つはわり算の指導の流れである。わり算は周知のように，３年生で等分除と包含除が指導され，５年生からその拡張を本格的に学習する。３年生から４年生の前半までの学習は，すべて「大÷小」で，整数の問題が扱われる。これらを経験した子どもたちは先の①から⑧のような知識を自らつくり出し，それで正解が得られるので，それが信念にまでなっていくのである。そうした状況下で，子どもたちは，５年生で等分除や包含除の拡張へと学びを進めていくのである。これほどの大きなまた困難な概念の修正は算数の他の内容では見られないものである。

もう１つの理由は，通常いわれていることであるけれども，あえていえば社会文化主義の指摘する点である。それは，子どもは日常生活の経験から学ぶ，経験に基づいて知識を習得する，ということである。わり算でいえば，等分除や包含除は確かに日常生活で経験する。しかし，除数が小数や分数のわり算は全くといっていいほど経験しない。このことが小数，分数のわり算概念の学習を非常に困難にしているといえる。

わり算には，上記のように，算数における他の学習内容にはみられない大きな困難要因があることをしっかりと認識しなければならないと考える。

ではどうすればよいのか。手がかりは，また３つの認識論にある。急進的構成主義では知識の構成に関して，認識主体による知識の意味づくりがキーになるとしている。わり算の学習に即していえば，等分除・包含除から拡張されたわり算の子どもによる意味づくりが非常に重要になる。この点から従来の学習指導を見直し，改善を図ることが求められる。

さらに急進的構成主義では，子どもたちが構成した知識は，社会での適用を経て，適用可能なものは「生存可能な知識」として存続し続け，そうでないものは消滅していくとしている。また，相互作用主義では一人一人がつくり出した知識やその意味はメンバーによる社会的相互作用－相互に作用しあう話し合い－によって，修正され，合意されていくとしている。こうした点からもこれまでの改善が考えられる。

加えて，社会文化主義では学習あるいは問題解決には道具が有効であるとしている。わり算の文章題の解決，拡張された小数や分数によるわり算問題の解決にも道具が求められる。そうした道具はこれまでも指導されてきているが，以下で検討するように有効に機能していない点がある。そこで，それを見直し，改善を図り，子どもがそこに立ち帰って，有効に使用できる道具づくりに力を入れることが必要である。

本研究においては，以上のような視座からわり算の指導の改善方策を検討していく。

２．わり算概念の拡張方策の比較検討

次に，上記で述べたわり算概念の拡張に関わる意味づくりとその問題解決に有効な道具づくりの両面に力点をおいて，わり算概念の小数や分数への拡張についていくつかの基本的な方策を比較検討していく。現行の教科書やこれまでの研究をもとにすると有力なものとして，下記で検討する４つの方策が挙げられる。なお，より具体的な検討を行うために，本研究の調査で取り扱った以下の４つの問題を事例として取り上げる。

例①　リボンを2.4m買ったら，代金は360円でした。このリボン１mの値段はいくらでしょうか。（÷帯小数　正答率　小６　80%）

例②　８冊の重さが４kgの事典があります。この事典の１冊の重さは何kgでしょうか。（小÷大　正答率　小５　66%）

例③　ただし君の体重は，ひろし君の体重の1.2倍です。ただし君の体重が37.8kgとすると，ひろし君の体重は何kgでしょうか。

（比の第３用法　正答率　小６　58%）

例④　赤いテープと青いテープがあります。赤いテープは５m，青いテープは10mです。赤いテープは青いテープの何倍でしょうか。（比の第１用法　小数倍　正答率　小５　57%）

（1）「等分除の拡張」方策

この意味づくりは次のように行われる。

○意味づくり：

わり算の意味を，整数値による等分から，小数・分

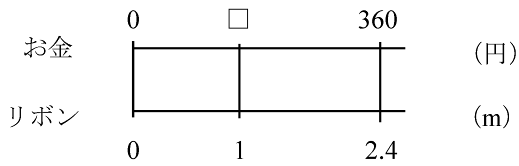
数に適用できるように，「１当たりの数量」を求める演算，比の第３用法へと拡張する。

この方策においては，子どもたちが演算判断の際に用いる道具として，以下のものが挙げられる。

○道具づくり：

㋐数直線

例①でいえば，以下のようなものである。



㋑言葉の式

例②でいえば，「長さ÷冊数＝１冊の重さ」である。

㋒類推

整数からの類推である。例③でいえば，ただし君の体重がひろし君の３倍だったら，37.8÷３なので，この場合は，37.8÷1.2と考える。

㋓「１ｍの値段」が求めるものなら，長さが除数

例①がそうであり，例②だと「１冊の重さ」とあるので冊数が除数となる。これは藤井（2013）らが指摘しているものであり，「１当たりの数量を求める」拡張されたわり算の意味にも沿うものである。

㋔「□の○倍」とあれば，□の数量が基準量。

倍に関わる問題に適用できるもので，例④でいえば，青いテープの長さが基準量で，この場合，除数になるので，「５÷10」とする。

等分除の拡張の方策は，わり算の本質的な意味づくりができる点がよい点である。しかし，道具の方は子どもにとって使いやすいものといえない点が難点である。上記に示した線分図からのわり算の立式はわり算であることや除数が何かが見えにくいし，言葉の式や整数からの類推もうまく機能しているとは言い難い。㋓や㋔も有効な道具として活用されるまでには至っておらず，改善が求められる。

（２）「比例関係」を活用する方策

○意味づくり：

後述するように，意味づくりについては必ずしも明確化されてはいない。

○道具づくり

この場合の道具としては次のものが挙げられる。

㋐比例の考えの逆の活用

２量A，Bがあり，Aが２，３，…倍になれば，Bも２，３，…倍になる。このとき，Aを２，３，…でわれば，Bも２，３，…でわったものになる。

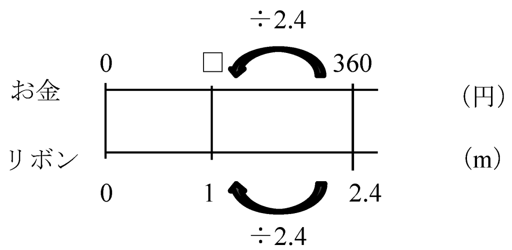
㋑表　例①では以下のような表が用いられる。

÷2.4

リボン	1	2	2.4	3	・・・
代金	□		360		

÷2.4

㋒数直線　例①では以下のもの。矢印が入るのが特徴。



この方策は，（１）の補完，あるいは代替策として近年いろいろと研究がなされている（田端，2010；東京フェスム支部，2017）。確かに，㋐やそれを補う㋑や㋒の道具は有効と考えられる。しかし，わり算の意味については，かけ算の逆算とするか，１当たりの数量を求めるものとするかの両方が考えられるが，定かではない。

他方で，例③，④などの場合に比例をどのようにとらえるのか，表や数直線をどうするか，１×X=Xから，X÷□＝１となる□がXであることの確実な使用が前提となることなど検討課題も少なくない。

（３）「かけ算の逆」方策

次には，わり算をかけ算の逆として意味づける方策がある。形式化すると次のようになる。

○意味づくり：ａ×□＝ｂのとき□＝ｂ÷ａ

□×ｃ＝ｄのとき□＝ｄ÷ｃ

この場合の道具は以下のものが考えられる。

○道具づくり：

㋐三項関係図

例①は次のような図が考えられる。

（三項関係図）　１ｍのねだん $\xrightarrow{2.4倍}$ 代金

（□円）　（360円）

（式）　□×2.4＝360だから

□＝360÷2.4

㋑言葉の式

例①でいえば,「単価×長さ＝代金」から「代金÷長さ＝単価」を導き，適用する。

この方策も今日（1）の補完策として活用されつつある。わり算の意味をかけ算の逆として意味づけることは理にかなっているし，三項関係図からの立式は機械的となるので容易といえる。しかし，課題はその道具となる三項関係図が書けるかどうかである。例①,②では1当たり量が□となる。また，例③，④では何が基準量となるかの把握が求められる。これらは必ずしも容易ではない。

（4）「包含除の拡張」方策

この場合の意味づくりは次のようになる。

○意味づくり：

整数倍から，小数倍，分数倍の意味づくりを行い，その逆として，小数倍，分数倍を求める。そして，比の第1用法に繋ぐ。

この場合の道具は次のものが考えられる。

○道具づくり：

㋐三項関係図　例④でいえば，以下のような図である。

（三項関係図）青いテープ $\xrightarrow{\text{□倍}}$ 赤いテープ
（10m）　（5m）

（式）　10×□＝5
□＝5÷10＝0.5

これは，例③，④などのように倍に関わる問題に適している。比の第1用法と一体的に扱える点もよい点といえる。例①，②などの問題については，（3）のかけ算の逆と同様の扱いとなる。そうしたことから，いずれにしても基準量の把握が大きな課題となる。

上記で検討してきたように，4つの方策にはそれぞれによい点もあるが，問題点もある。また，例①，②などの1当たり量を求める問題に適した方策と，例③，④などの倍に関わるわり算に適した方策とがある。

また，それぞれの子どもによっても使いやすさは違ってくるところである。このことは，1つの方策に絞ることは有効ではなく，どれかを軸にしながら，他の方策も学ぶことが現実的であることを示唆している。

そうした視点から，4つの方策を検討すると，意味づくりという点からは，等分除・包含除というわり算の意味を踏まえて，等分除の拡張，包含除の拡張を基本とするのがよいと考えられる。そして，道具づくりという点から，子どもたちにとっての使いやすさ・有効性を踏まえて，かけ算の逆，比例関係を基本とするのがよいと考えられる。併せて，いろいろな道具づくりを見直し，改善していくことも検討に値する。

Ⅴ．わり算概念の学習指導改善へ向けた授業実践

次に，上記を踏まえて，意味づくりと道具づくりに力点を置いて，本稿のⅢで指摘したいくつかの課題の中から，大きいと考えられる4つを選んで，それぞれの課題の具体的な改善方法について授業実践を通して，検討していく。以下にその授業実践の概要を述べる。

1．「初期の倍概念に関わるわり算」の学習指導（3年）

（1）問題の所在と改善策

整数のかけ算を初めて学ぶ際に「倍」という用語が教科書に登場するが，その後，小数や分数の乗除を学ぶまでにその素朴なイメージ（倍関係では，基準量より比較量が大きいなど）が見直されることはない。

しかしながら，小学3年までで学ぶ数は整数であるから，このイメージを持つことはごく自然なことであり，むしろ整数の分かりやすさを生かしながら乗除の場面での数量関係を明確に捉える枠組み－道具－を持たせることが大切であると考える。本授業ではこの道具づくりとして，三項関係図に注目する（図2）。

赤いテープ21cm，青いテープ3cmで，赤いテープは青いテープの7倍です。これを図に表しましょう。

図2．三項関係図

三項関係図は，かける数・かけられる数・両者の倍関係を視覚的にするために，2つの枠（基準量と比較量；図2中の青いテープ3cmと赤いテープ21cm）とそれらをつなぐ矢印（基準と比較の関係；図2中の7倍）からなる。三項関係図は通常，矢印の元から先へと読むことによってかけ算場面を表すのであるが，一度かけ算場面として問題を理解できれば，未知数の場所によってかけ算・わり算が決まることの気づきを経て，かけ算とわり算が互いに逆算として統合できるよさがある。未知数の図中の位置によって演算決定をすることは必ずしも数学的ではないが，数量関係を捉えるための教育的働きかけの1つの道具として取り入れることにした。

（2）授業実践の結果の概要

小学３年１クラス（31名）を対象として，三項関係図を意図的に指導する実践（２単位時間）を行った。児童に対して図を与える方針であったため，図の形式（いわゆるかき方）と読み方，式との関係を重視して指導した。児童にとって初めて出会う図であるため，かける数（基準量）を「ものさし」，倍を求めるための操作を「ならべる」と呼ぶなどして，児童にとって解釈が容易になるように配慮した。

白いテープの長さを何倍かすると黄色いテープになります。白いテープは５cm，黄色いテープは15cmです。
黄色いテープは白いテープの何倍ですか。

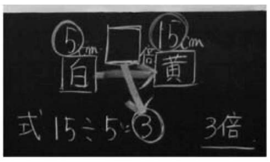


図３．問題と三項関係図

図３は実践中に取り組んだ問題と，解決のために用いた三項関係図である。児童はこのように，問題，式，図を関連づけることによって解決を図った。

実践の事前事後に，比の三用法に当たる乗除の問題を問う調査を行った。その結果，いずれも正答率80%を超えており，実践そのものは有効であったと考えられる。その反面，式より先に図をかいて考える児童は半数に満たなかった。ただし，研究の意図を理解して授業をした教師によると，実践中，算数に苦手意識のある児童にとって，図にしてみることで問題の意味が分かることもあるようであった。これまでは問題中の数量の大小関係，何倍というキーワードなどによって演算決定をしてきたのが，「ものさし」で測り取るイメージおよび図中の配置，さらに図をかくために「〜の」「〜を」「〜で」のような助詞にも注意しなければならないというように，演算決定のための鍵となる要素に気づくようになってきたことが示された。

（3）考察

実践では問題場面を理解したり演算決定を助けたりする便利な道具として三項関係図を導入した。そのため形式指導が先行しがちであり，事後調査からは児童にとって図の必要性とともに，自然なかき方であるかどうかもまた大切な視点であることが窺われた。すなわち，基準量は矢印の左側，比較量はその右側であることにこだわる必要はない。問題文での数量の登場順に配置していきながら，関係を表すために矢印の向きを変えるほうが自然であるかもしれない。

児童による乗除の場面理解の道筋をまとめると次のようになる：等分除の操作的イメージ（「分ける」）→包含除の操作的イメージ（「ものさしをあてて」）→図と式のリンク（未知数の場所による演算決定）→問題文からの演算決定の判断（キーワードによる演算決定）。数量の大小関係だけではなく，場面に応じて数量の倍関係の理解を優位にするためには，学年を超えて一貫した図の指導（特に関係図の指導）が必要である。

２．「小÷大（整数）のわり算」の学習指導（４年）

（1）問題の所在と改善策

本時目標は，「商が純小数になるわり算（小÷大）の場面を式に表すことができる」ようにすることである。

本場面における問題の所在は，わり算（の数値）が「大÷小」になるという児童なりの構成，思い込み（ミスコンセプション）によるところを修正していくことにある。本研究の調査問題による正答率は52%であり，誤答には，大÷小を立式した児童が殆どであったことからも，問題の所在は明らかである。

この改善策としては，わり算の意味づくりに関わり，数値の大小ではなく，文章題と式のそれぞれについて，基準量，割合，比較量という数量の役割と関係に意識が向くようにする必要があると考えた。そのために，以下のような６つの方策のもとに授業実践を行った。

【授業の改善策】

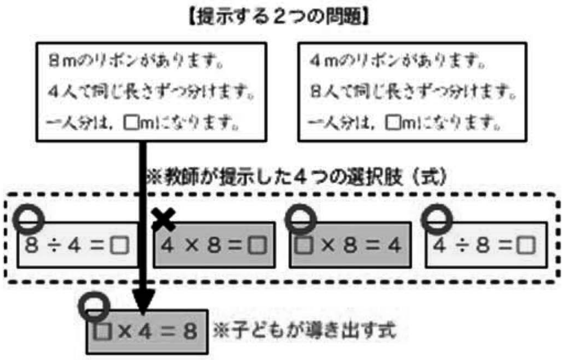
① 文章題から提示せずに，式→文章題の順に提示し，式がもつ意味を想像させるようにした。

② 課題を，「文章に合う式を選ぼう」とし，目標意識を，立式することに焦点化した。

③ 提示する文章題は，同じ場面（リボンの長さ，分割場面），同じ数値（４と８と□）を用いた「小÷大」と「大÷小」の２つを提示して，それぞれに合う式を選ばせた。このことによって，数値の大小ではなく，数量の関係へと意識が向くようにした。

④ 立式の際に，「基準量×割合＝比較量」というかけ算（第２用法）と照らし合わせながら考えさせるために，かけ算の式も選択肢として提示した。

⑤ 基準量と割合のちがいに意識を向けさせ，またそれらの関係を児童自ら考えさせるようにするために，選択肢として用意した２つのかけ算の式は，どちらも誤答となるものとした。



⑥　わり算の式だけでなく，かけ算の式もできないかを考えさせ，１つの文章題について，かけ算とわり算の２つの式ができることを確認した。

以上６つの改善策によって，わり算とかけ算の相互関係理解を強化するとともに，数値の大小よりも数量の関係に意識が向くようにした。

（２）授業実践の結果の概要

本授業実践を行った学校は，全国学力・学習状況調査において，全国平均を10ポイント前後下回っており，学力保障の重点校に指定されている学校でもあった。そうした学校の４年１クラス（30名）における実践であったが，授業後の調査問題に対する正答率は80%を超えて，概ね満足できる結果であった。

授業の中で，同数値を用いた２つのわり算式（４÷８と８÷４）を行き来する姿（比較活動）が頻繁に見られた。そして，どちらの式が妥当かを判断する根拠として，「１人分の長さ（数）が◯だから」という発言が出されていた。またこれは，（１人分の数）×（いくつ分）＝（全部の数）というかけ算の意味に基づいたものであり，かけ算の式と関連付けた発言も続いた。

（３）考察

先に述べたような基準量を見つけながら，式を判断する姿（発言）が続いた背景には，類似した２つの問題場面と複数の式（わり算だけでなくかけ算も含む）を提示し，選択させたことが要因として考えられる。

とりわけ，かけ算の式を選択肢として挿入したことで，基準量，割合，比較量という数量の役割と関係をとらえやすくなったと考えられる。立式の判断根拠を述べる際に，かけ算の場面を引き合いに出している児童が多かった。併せて，立式の判断根拠は，割合，比較量よりも先に，基準量の方へ意識が向きがちであるという児童の傾向も見えてきた。

本実践では，これまでに，大÷小のわり算しか経験していない児童が，数値の大小に惑わされることなく，これまでのわり算と同様に，数量がもっている役割とその関係に目を向けさせることが重要である。そして結果的に，わる数よりわられる数が小さい場合も，これまでと同じようにわり算の式に表すことができることを知るのである。このような目標に照らし合わせてみても，本実践が提案している６つの改善策は有効に機能していたとみている。

３．「除数が小数のわり算」の学習指導（５年）

（１）問題の所在と改善策

除数が小数のわり算の学習上の課題として，次のことが挙げられる。

・純小数でわるわり算（等分除）の立式に関わる正答率が低いこと
・純小数でわることの意味理解の欠如が見られること，とりわけ純小数でわると商が大きくなることへの児童の抵抗感が大きいこと
・純小数でわるわり算（等分除）の指導法が未解明であること

これらの点をどう克服していくかが課題となる。教科書では関係図，４マス図，２本の数直線といった図表現を通して，わり算の手続きだけでなく意味の理解を図ろうとしてきた。これらは一定の学習効果はあったが，わり算概念自体の転換が十分に図られず，その効果は限定的であったと考えられる。

本実践では，除数が小数のわり算（等分除）の意味づくりにおいて，まず純小数倍の理解を培うことを考えた。その理由としてかけ算ベースで考えたり，２本の数直線や４マス図で考えたりする際にも，例えば0.8倍する，0.8倍でわるといったことの意味理解が必要となることが挙げられる。小数倍の理解に始まり純小数のわり算（等分除）の理解へ繋げる授業を構想する上で，小数倍の理解自体が難しいことから，それを成し遂げる為に，２つの表現を道具として活用し，小数倍から等分除への円滑な接続を促すこととした。

・操作的表現（動きのあるテープ）
・４つの数の関係図

内容構成は，帯小数倍，純小数倍，帯小数でわるわり算（等分除），純小数でわるわり算（等分除）とし，児童の理解を徐々に深められる構成とした。

（２）授業実践の結果の概要

実際の授業は５年１クラス（30名）で，次のように進行した。

第１時：小数倍を理解する（包含除）
第２時（＋α）：純小数倍を理解する（包含除）

第３時：整数÷純小数（等分除）

第１時では，「16.8cmが８cmの何倍か」という問題で，操作教具を使って，基準を８cmとして16.8cmを，あまりを含めてどのように測定するかを探究した。除数を10等分したものが１つ入ることを捉えて，２倍と0.1倍になることを学習した。

第２時は，「7.2mが９mの何倍か」を，第１時と同様の操作教具を使って探究した。ここでは基準の数が測りたい数よりも大きいので戸惑う児童も見られたが，第１時の学習と比較し，基準量を明確化した。しかし，教具の作り方に不備があり，児童に混乱が生じる結果となった。時間を20分ほど延長し，教具を再度整え，適用題として用意していた「7.2は12の何倍か」という問題を使って測定の仕方を確認した。この時，児童は基準の数を10等分して測る考えをもとに，0.1倍，0.2倍と測っていき，0.6倍になったとき喜びを感じていた。多くの児童が測定のやり方と純小数倍を実感するに至ったと思われる。

第３時は，「2.4mで96円のリボンがあります。１mの値段は何円ですか」，および「0.8mで96円のリボンがあります。１mの値段は何円ですか」の２問を扱った。その際，「0.1m当たりをもとめる方法」と，「10倍した長さを求める方法」があることを確認するとともに，0.1m当たりの考えは前時までの10等分する考えに通じるという気づきが生まれた。児童は0.1が何個あるかといった探究を自然に行っていた。さらに0.8でわるとなぜ１当たり量を求めることができるかを，４つの数の間の比例関係をもとに探究した。１mを0.8倍すると0.8mになり，これが96円になるので，逆に96を0.8でわるから，１当たりの数量になるといった学びである。最後に，わり算が１当たりの数量を出す計算であることを確認して授業は終了した。

（３）考察

授業実践前と実践の約１ヶ月後に，クラスの児童を半分に分けて，それぞれに算数調査AとBを実施した。全体の平均正答率は下の表の通りである。

	算数調査A	算数調査B
事前テスト	72.9%	64.0%
事後テスト	82.2%	78.0%

算数調査Bは包含除に関わる問題が多いため，包含除ベースで探究した実践で伸びるのはある意味で自然であるが，算数調査A，Bともに等分除に関する問題も伸びていることが分かった。特に，わり算をして商が増えることへの抵抗感が20%程度改善していた。

授業実践では，かけ算の逆によるわり算の見方や，２本の数直線や４マス図的な考察も行われたが，これらを結びつけたのは，第１時と第２時で培った純小数倍の意味づくりであったと考える。倍の理解が弱ければ，上記の学習をしても形式的処理に終わる可能性がある。また，×0.8，÷0.8と書いても，×は増える，÷は減るというイメージで処理してしまう傾向がある。とりわけ，0.1に当たる大きさを求めるという思考が，包含除と等分除のつなぎの役割を果たしていたことが本実践からの知見として挙げられる。

４．「分数÷分数」の学習指導（６年）

（１）問題の所在と改善策

筆者らが実施した調査では，「等分除の拡張」にかかわる「分数を分数でわるわり算」（以下，「÷分数」）の立式について，次の２つの典型的誤答が同定されている（山口他，2017，pp.８－９）。

〔誤答１〕被除数と除数を逆にしたわり算の式を立式する誤答
〔誤答２〕かけ算の式を立式する誤答

このことをふまえ，「÷分数」の達成度の改善を図るためには，上記の２つの誤答を解消するための「÷分数」の指導の工夫が求められる。こうした視座から，意味づくりと道具づくりの両面を考え，「どんな量の１当たりを求めるか」に着目して，本授業では，次の３つの改善点から成る１単位時間（45分）の授業を企画，実践し，その有効性を検証した。

〔改善点１〕被除数と除数が逆になるような２つの文章題を比較する場を通じて，「÷分数」の除数は，どんな量の１当たりを求めるのかを考えて，それと同じ量の数値になるという道具づくりをする。
〔改善点２〕「÷分数」とともに，「整数のわり算」（以下，「÷整数」）や「小数のわり算」（以下，「÷小数」）も想起させながら，わり算が「１当たりの数量」を求めるための演算であることを統一的に理解させる。
〔改善点３〕わり算の立式の指導に当たり，「かけ算の逆演算」という視座から理解を促したり，４マス図や数直線を積極的に活用したりする。

なお，本授業は，2016年11月に実施したものであり，児童にとって「÷分数」は既習であった。その意

味で，本授業は，「÷分数」の意味理解に関する一層の深化をねらったものである。

（２）授業実践の結果の概要

６年１クラス（37名）における実践で，導入では，教師が次の問題１を提示し，答えを求めるための式を考えるよう指示した。

〔問題１〕３／４mの重さが２／５kgの棒があります。この棒１mの重さは何kgですか。

自力解決やペアによる解決の後，教師によって指名された児童２名が，４マス図や数直線を使って，答えを求める式が「２／５÷３／４」となることを正しく説明した。そして，教師は，「かけ算の逆演算」という視座からも，この式が正しいことを補足説明した。次に，教師は，「３／４÷２／５」や「２／５×３／４」という誤答があったことを紹介し，「文章題の正しい式を考えるには，どこに着目して考えればよいかを調べよう。」という本時の「めあて」を設定した。

「めあて」の設定に続いて，教師は，問題２を提示し，答えを求めるための式を考えるよう指示した。

〔問題２〕３／４mの重さが２／５kgの棒があります。この棒１kgの長さは何mですか。

問題２に対し，多くの児童が「３／４÷２／５」と正しく立式した。それをうけて，教師は，問題１と問題２の式を比較し，気づいたことを発言するよう促した。これに対し，多くの児童から，「わられる数とわる数が入れ替わっている」との発言があった。

さらに，教師は，２つの文章題を比較することによって，入れ替わっている理由を問うた。この発問に対し，「求めたいものが１m当たりか，１kg当たりかが異なる」という発言が相次いだ。この発言をもとに，「÷分数」の除数に当たる数値はこの単位に依存していることが共有された。

その後，教師は，次の２つの文章題を提示し，「÷整数」や「÷小数」の式においても，「÷分数」の式の場合と同様に除数が決まることを確認した。

○12本の鉛筆を３人で等しく分けます。１人分は何本になるでしょうか。
○0.6mの値段が90円のテープがあります。このテープ１mの値段は何円でしょうか。

以上をふまえ，教師は，わり算では，わる数は，どんな量の１当たりを求めるのかを考えて，問題文にあるそれと同じ量の数値になることを本時の「まとめ」とし，授業を終えた。

（３）考察

（２）で報告した授業実践からもわかるように，児童たちは，「等分除とその拡張」の文脈をもつわり算では，除数が，どんな量の１当たりを求めるのかを考え，それと同じ量の数値になることを十分に道具として活用していた。また，児童たちは，「÷整数」，「÷小数」，「÷分数」のいずれの場合であっても，「等分除とその拡張」の文脈のわり算とは，「１当たりの数量」を求めるための演算であることを統一的に理解していた。

なお，本授業実践の最後では，次の練習問題にも取り組ませている。

２／３mの重さが４／５kgのホースがあります。このとき，４／５÷２／３になる問題を作りましょう。

この問題に対し，例えば，「このホース１mの重さは何kgになりますか。」などと，問題を正しく完成させることができた児童の割合は91.9％であった。こうした結果も総合すると，前述の３つの改善点は，「÷分数」の問題解決の改善に対して，一定程度，有効であったと判断できる。

Ⅵ．総合的・体系的なわり算概念の学習指導改善方策

上記の研究成果を総合的に考察して，最後にわり算概念の学習指導に関する改善方策を提言していく。

１．全体的な学習指導方策

人間は認識，感情，性格等様々な面において複雑なシステムと豊かな個性を有しており，複雑系といわれている。したがって，その人間の学習，授業づくりを１つの整合的なパラダイムに収めることは現実的ではない。そこで，共通点もあるが互いに相反する原理を有する３つの主義を協応，補完するパラダイム－多世界パラダイム－を基盤とすることが考えられる。

３つの主義は先にも述べたように，単純化すれば，それぞれ以下のものを認識の基盤においている。
・急進的構成主義…個人による構成　：自力解決
・相互作用主義　…他者との相互作用：集団解決
・社会文化主義　…文化化　　　　　：学習結果

算数教育における問題解決学習は，とりわけ上記に示した局面でこれらに依拠している。このことは多世界パラダイムがすでに算数教育の基盤となっているこ

とを示しているといえよう。

そこで，算数教育の基盤として多世界パラダイムとそれに基づく問題解決的な学習指導を改めて提唱する。

2．わり算概念の学習指導方策

すでに検討してきたように，わり算概念の学習指導においては，意味づくり，道具づくり，そしてそれらの往還が改善につながると考える。以下，その要点を述べていく。

（1）意味づくりの方策

わり算の意味づくりはまずは等分除・包含除で始まる。その等分除の指導の際に「１人分を求める」ことをより強調すべきと考える。「等分」よりも，「１当たりの数量」を求めることへ繋げることを踏まえ，そのイメージ形成を促すのがよいからである。

わり算の意味の拡張の際には，等分除の拡張方策を軸にして，「１当たりの数量」を求める演算としてわり算を意味づけ，比の第３用法に繋いでいくことを基本とする。また，包含除の拡張方策を用いながら，比の第１用法に繋げていく学習指導も行う。なお，倍の指導は学習指導要領にあまり記されていないことが問題であり，一層丁寧な指導が求められるところである。さらに，わり算はかけ算の逆演算である意味づくりも併用する。

なお，意味づくりにおいては本稿のⅤの３で報告した実践授業のように，小数倍の意味づくりを操作的活動などによりしっかりと扱うことも重要である。

（2）道具づくりの方策

道具づくりにおいては，本稿のⅣの２で指摘したように比例関係方策，かけ算の逆方策が有力である。それに関わり，数表，数直線，三項関係図なども活用する。

併せて，文章題における言葉へ着目することも改善につながると考える。わり算の本質的な意味を踏まえると，本稿のⅤの４で報告した授業実践のように，「どんな量の１当たりを求めるか」に着目すると除数が浮き彫りになる。これは有効な道具につながる。

また，倍に関わるわり算においては，「□の○倍」という文言が使用される。ここにおいては，□に当たる数量が基準量となり，わり算においてはそれが除数になる。これも有効な道具につながるものである。

（3）意味づくりと道具作りの往還

意味づくりと道具づくりを別々に行うのではなく，それらの往還の場を設けることも重要である。例えば，「わり算は１当たりの数量を求めること」の意味づくりに取り組んだ際には，併せて「だから，１m当たりの重さを求めましょう」とある場合には，長さが除数になる道具づくりにも取り組むことである。さらに，その答えの確認を通して，長さでわると１m当たりの重さが求められることを押さえていく。それはわり算の意味づくりの強化につながることになる。

（4）社会的相互作用の活用

多世界パラダイムにおいては，子どもたちは自分なりに知識づくりをして，それを仲間との話し合いでよりよいものに修正していくのが学習と捉えている。そこで，問題解決の検討段階において，適用可能性，生存可能性，通常いわれる正しいかどうかについてクラスでしっかり協議することが重要である。これについても今まで以上に重要視していくことが求められる。

上記の提言が現場教師に届き，その実践により，わり算概念の学習指導の改善が進展することを祈念して擱筆する。

［付記］本研究は，JSPS科学研究費補助金26285205（研究代表者：中原忠男）の助成を受けてすすめられた研究成果の一部である。

主要な引用・参考文献

岡崎正和，前田一誠，中原忠男，山口武志，影山和也（2016），「倍に関するわり算の位置づけに関する研究－小学５年から中学１年までのわり算調査をもとにして－」，『日本数学教育学会第49回秋期研究大会発表集録』，pp.161-164.

国立教育政策所教育課程研究センター（2012），『全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ－子どもの学習指導の改善・充実へ向けて　小学校編－』，教育出版.

田端輝彦（2010），「分数の乗除法の意味指導に関する一考察－比例関係を顕在化させた指導を通して－」，『日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集』，pp.121-126.

筑波大学附属小学校算数研究部（2013），『算数授業論究Ⅴ：わり算の本質』，東洋館出版社.

東京フェスム支部（2017），「現行の算数教育の“ここが問題だ”!」，『新しい算数研究』，2017.2，No.553，pp.34-35.

中原忠男（1995），『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社.

中原忠男（1999），「数学教育における構成主義的授業

論の研究（Ⅱ）－「数学学習の多世界パラダイム」の提唱－」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，５，pp.1-8.
日本数学教育学会算数教育編集部（2005），「乗法・除法の意味（演算決定）の指導のあり方についての今後の研究に向けての提言」，日本数学教育学会誌『算数教育』，87（10），pp.12-31.
藤井斉亮（2013），「わり算のミスコンセプション」，筑波大学附属小学校算数研究部編『算数授業論究Ⅴ：わり算の本質』，pp.16-19.
向山宣義（2006），「除法の意味理解の指導の課題と改善－小数，分数の除法を中心に－」，日本数学教育学会誌『算数教育』，第88巻，第６号，pp.2-9.
山口武志，影山和也，中原忠男，岡崎正和，前田一誠（2017），「「等分除とその拡張」に関わるわり算問題の調査結果の考察」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，23（１），pp.1-20.
渡会陽平（2011），「小学校算数科における乗除法の意味に関する学習過程の分析－G. Vergnaudの概念野理論を枠組みとして－」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，vol.97・98，pp.3-16.
Bell, A., Greer, B., Grimison, L., and Mangan, C. (1989), Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), pp.434-449.
Cobb P. (1994), Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical education, *Educational Researcher*, 23 (7), pp.13-20.
Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Culures*, LEA: Hillsdale.
Greer, B. (1992), Multiplication and division as models of situation. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.276-295), New York, U.S.: Macmillan Publishing Company.
Greer, B. (1997), Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction,* vol.7, no.4, pp.293-307.
Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997), Young children's intuitive models of multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), pp.309-330.