多世界パラダイムに基づく算数授業における社会的相互作用の規範的モデルの開発研究（Ⅱ）

―「場合の数」の授業による検証 ―

Research on development of the prescriptive model for designing social interactions in an elementary mathematics class based on the multi-world paradigm (II)

― Verification of its effectiveness through teaching and learning of ‘number of outcomes’ ―

次世代教育学部教育経営学科
中原　忠男
NAKAHARA, Tadao
Department of Educational Administration
Faculty of Education for Future Generations

岡山大学大学院教育学研究科
岡崎　正和
OKAZAKI, Masakazu
Okayama University
Graduate School of Education

広島大学大学院教育学研究科
小山　正孝
KOYAMA, Masataka
Hiroshima University
Graduate School of Education

鹿児島大学教育学部
山口　武志
YAMAGUCHI, Takeshi
Kagoshima University
Faculty of Education

愛媛大学教育学部
吉村　直道
YOSHIMURA, Naomichi
Ehime University
Faculty of Education

兵庫教育大学大学院学校教育研究科
加藤　久恵
KATO, Hisae
Hyogo University of
Teacher Education
Graduate School of Education

岡山大学教育学部附属小学校
片山　　元
KATAYAMA, Hajime
Okayama University attached Elementary School

キーワード：算数授業，多世界パラダイム，社会的相互作用，規範的モデル

Abstract：This study aims at constructing the prescriptive model which has the theoretical background of social interactions in elementary mathematics classrooms and at the same time which is effective and applicable to teaching practices at elementary school level. In this paper we verify the effectiveness of this model through a teaching experiment on six grade classes of ‘number of outcomes’.

As a result of analysis, we found that the fundamental process of being conscious, solving by the individuals, solving by small group, being reflective, and then making agreement, in particular the small group activity, contributed to the development of the children’s understanding of ‘number of outcomes’. Also, it was suggested that the children’s solving activities progressed from their ‘individual’ solution to ‘quasi-general’, and ‘general’ ones.

We also identified the types of intentions of the social interaction: Share of the premise, having and devising their own ideas, sharing the ideas with others, reflecting on the merit and limit of the ideas, abstracting and generalizing from the ideas, finding the commonality, characteristics, and limits among the representations. Moreover, as to the interaction with representations, we found that the children could devise their own representations in order to prevent the overlap and omission, and also recognize that the representations by polygon and table equipped such devices. These findings demonstrate the effectiveness of the prescriptive model for teaching practices.

Keywords：elementary mathematics class, multi-world paradigm, social interaction, prescriptive model

１．本研究の目的

平成20年告示の学習指導要領において表現力の育成や言語活動の重視が打ち出された。それを受けて，話し合いや学び合い活動を重視した算数授業の研究・実践が一層活発になされるようになってきた。しかし，その研究はなお個別的，事例的研究にとどまるものが多い。また，その実践は子ども主体という下で子どもの活動を中心とするため，教師の役割・働きが見えにくいものとなっている。（日本数学教育学会，2012）

本研究はこうした状況を踏まえて，算数授業における話し合い・学び合い活動を算数教育の目的達成によりつなげられるように，算数授業における社会的相互作用の理論的基盤があり，かつ実践に適用可能で効果のある規範的モデルを構築することを目的とする。

本稿では、まず本研究の理論的な枠組みとそれに基づいて構築した規範的モデルの第１次案（中原ほか, 2012）とそれを一部修正した第２次案の要点を説明する。ついで、そのモデルに基づく実践授業の分析を通してモデルの有効性を検討・検証する。後者が本稿の主要な目的である。

２．本研究の理論的枠組み

２．１　多世界パラダイム

算数教育の目的，とりわけ思考力・表現力の育成には子ども主体の授業が求められる。近年，それを支える有力な認識論が登場してきた。それは，急進的構成主義，相互作用主義，そして社会文化主義である。これらはその基本原理に関して相容れない相異点を有している。しかし，これらに基づく算数・数学教育の研究が進むにつれて，急進的構成主義と相互作用主義は補完的な位置づけが可能であり，さらに急進的構成主義と社会文化主義は子どもの活動の何処に視点を置くかの違いでもあり，両者はコインの表と裏のような関係にあるということが指摘され始めた（Cobb, 1994; Cobb & Bauersfeld, 1995）。

こうした状況と子どもが知識を認識，構成していく過程の多様性に着目して，中原はこれらの３つの主義を組み入れた算数・数学教育の枠組みとして，図１で表される「多世界パラダイム」を提唱した（中原, 1999）。本研究は，算数の授業と子どもの学びの実態よく捉えていることから、これを理論的な基盤とする。

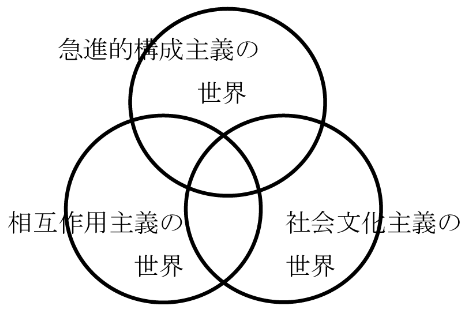


図１　数学教育の多世界パラダイム

２．２　社会的相互作用

本研究においては，授業における話し合い活動を，認識主体が相互に作用・影響を与え合う，社会的活動という意味で捉え，そうした点を強調するために，それを社会的相互作用と呼ぶ。さらに，本研究においては，それを他者との相互作用に限定しないで，その重要性から自己との相互作用，表現や具体物，事象等との相互作用も含めて考えることにする。その上で，それらを次のように３つに区別することとする。

・社会的相互作用Ａ：他者との相互作用
・社会的相互作用Ｂ：自己との相互作用
・社会的相互作用Ｃ：表現等との相互作用

２．３　教師の役割

子ども主体の授業と子ども任せの授業とは似て非なるものである。後者は教師が教師としての役割を果たしていないものである。他方，真の子ども主体の授業においては，教師は教師としての主体性を発揮し，その役割を果たしている。

算数授業における教師の役割について社会的相互作用をキーワードに考えたとき，次の７つの役割を挙げることができる。

①司会者　②調整者　③支援者　④足場提供者
⑤指導者　⑥熟達者　⑦相互作用の一員

①②③の司会者・調整者・支援者は，急進的構成主義の考えに，②③④の調整者・支援者・足場提供者は相互作用主義の考えに，④⑤⑥の足場提供者・指導者・熟達者は社会文化主義の考えとよく整合する。

３．規範的モデルの第１次案

本節では，上記の枠組みに基づいて構築した規範的モデルの第１次案の概要を示していく。

３．１　授業過程について

授業過程は規範的モデルの基盤をなす重要なものである。これについては，中原（1995）の構成的アプローチの授業過程を軸に検討し，それを少し修正し，小集団活動を位置づけることとした。それは，最近の小グループによる授業の研究で言われているように，一人ひとりの子どもが発表したり，他者の考えをしっかりと聞いたりする機会をできるだけ多く設けることなどをねらいとするものである。

具体的には，次の授業過程を基本とした。小集団活動と自力解決の順序については両方があり得るとする。

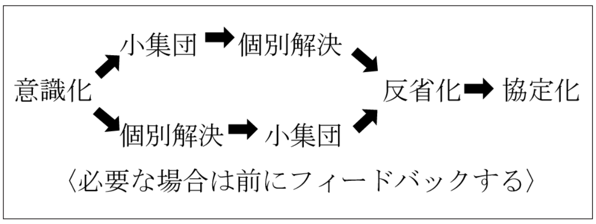


図２　基本的な授業過程

図２の上の流れの場合の各段階における子どもの主要な活動は次のとおりである。

○　意識化：問題を理解し，解決を意識化する
○　小集団：小集団における相互作用を介して解決へ向けて見通しを立てる
○　個別解決：自力で解決方法を考え出す
○　反省化：学級全体で，解決方法を発表し，反省的思考による比較・検討などを通して，練り上げる
○　協定化：一般性のある解決方法を共有化する

また，下の流れの場合の個別解決と小集団における活動は次のようになる。

○　個別解決：自力で見通しを立て，解決方法を考え出す。
○　小集団：小集団内において解決方法を発表しあい，小集団としての解決方法をまとめる。

なお，授業は生きものであるので実態に応じて柔軟に対応していくことになる。上記は一応の目安であることを付言しておく。

３．２　３種類の社会的相互作用の位置づけ

上記の授業過程を基本として，先に区別した３つの社会的相互作用を各段階にどのように位置づけるかを検討した。その結果，上記の各段階における子どもの学習活動を促進し，授業の目標達成に迫るために，それぞれの社会的相互作用の特色や役割を踏まえて，主要なものを図４の②のように位置づけることとした。

意識化と反省化の段階ではすべてのものが重要となる。小集団の段階ではＢ，自力解決の段階ではＡが他のものに比べて役割が小さいという位置づけである。協定化の段階においてはその内容の表現に基づいて合意するということで，Ｃが最重要とするものである。

なお，その後の検討で協定化の段階は合意が重要なのでＡも最重要と位置づけることとし，そう修正したモデルを第２次案とした。

３．３　教師の活動

次に，授業過程の各段階における子どもの主要な活動は先に述べたとおりであるが，それを可能とするために，教師はどのような活動をすべきかについて考えてみよう。これについては，図４の③のような活動が重要となる。

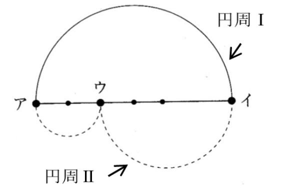
３．４　反省化の段階の展開

社会的相互作用を通して数学的認識を高める段階として，本研究では次の３つの段階を考えていく。

a　個別的な解決
b　準一般的な解決
c　一般的な解決

これらは，円周状の道の長さに関する小学校５年の

授業実践における児童の考えの分析から得られたものであり，反省化の段階の高まりの様相を示唆していると考える。これらの段階における解決とは，具体的には，「２つの円周状の道の長さはどちらが長いか」



(a)　円周Ⅰ：10×3.14×1/2=5×3.14=15.7
円周Ⅱ：4×3.14×1/2=2×3.14=6.28
6×3.14×1/2=3×3.14=9.42
6.28+9.42=15.7
だから同じになる。
(b)（a を受けて）円周Ⅱは分配法則から，
(4＋6)×3.14×1/2 となり，円周１と同じ。
(c) a, b２つの考えを踏まえて，文字を使う。
円周Ⅰ：（a＋b）×3.14×1/2
円周Ⅱ：a ×3.14×1/2＋ b ×3.14×1/2
＝（a＋b）×3.14×1/2
だから同じになる。

図３　円周Ⅰと円周Ⅱの比較

という問題を巡って子ども達から出された，図３の(a)，(b)，(c) のそれぞれの考えに相当する。

こうしたことから，反省化の段階においてはそれまでの段階における「個別的な」解決方法やその表現を反省的に思考させ，それを「準一般的な」あるいは「一般的な」解決方法や表現へと練り上げていくことが求められる。それは，いくつかの解決方法を比較して，類似点や相異点を考える活動となることも多い。そして，その際には表現方法の改良に着目することが有効となる。そうしたことを踏まえて本研究では反省化における社会的相互作用を最も重視する。

上記で検討した事項を整理すると下記の図４のようになる。これを規範的モデルの第２次案とする。

４．小学校６年「場合の数」の授業による検証

本節では，算数授業における社会的相互作用の規範的モデル（第２次案）に従って構想，実践した，小学校６年の授業を分析して，その有効性の検証を行う。

４．１　教授実験について

教授実験は，国立大学附属小学校６年生１クラスで平成24年12月６日，12月７日の２日間で，計２時間実施した。事前の作業として，算数授業における社会的

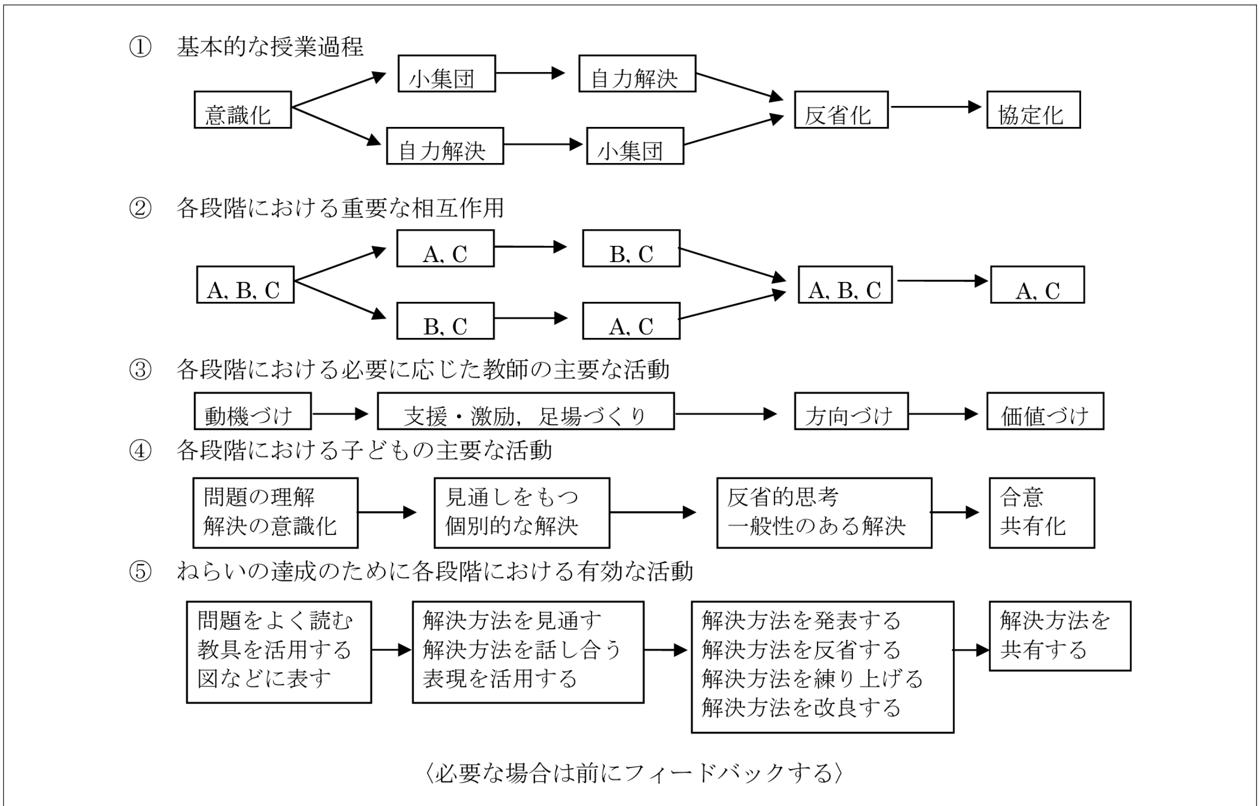


図４　算数授業における社会的相互作用の規範的モデル（第２次案）

相互作用の規範的モデルを中心に，研究の概要を教師に伝えるとともに，教師が作成した学習指導案を次のガイドラインの点から見直しながら，授業を協働的に構想した。さらにこれに従って，第一時，第二時ともに，下記のような３つの仮説をたてて，実践した。

＜ガイドライン：授業づくり・実践＞

①「基本的な授業過程」に即した授業づくり，展開とする。

②社会的相互作用の活性化を意識し，特にどの段階で重視するかを計画する。

③教師の主要な活動を意識し，特にどの段階で何を重視するかを計画する。

④授業づくりの段階において，次のような形式で仮説を設定する。(〈例〉仮説１．○○の段階で教師が○○の活動を行うと，社会的相互作用が活性化し○○ができるようになる。仮説２．○○の段階で教師が○○の活動を行うと，表現方法の改善がなされ，○○ができるようになる。)

＜第一時の仮説＞

仮説１　本時の始めの段階で教師が「落ち」や「重なり」の確認を行うと，全部の組み合わせについて「全てを書き出し，重なりを消す」考えにつながるようになる。

仮説２　全てを書き出す考えが出そろった段階で，教師がランダムに調べる誤答を提示すると，「まず１つをもとにして順序よくとらえる」考えのよさを明らかにすることができるようになる。

仮説３　「まず１つをもとにして，順序よくとらえる」考えのよさが定着した段階で，教師が「頭文字を線でつなぐ」考えを子どもから取り上げると，名前を簡単にして，線でつないで考える考えのよさに気付くことができるようになる。

＜第二時の仮説＞

仮説４　５種類の中から２種類を選ぶ組み合わせを伝え合う段階で教師が「１つをもとにして順に書き出す」考えから取り上げ確かめ合う活動を行うと，「まず１つをもとにして順序よく整理する方法」の一般化に転移するようになる。

仮説５　「１つをもとにして順に書き出す」考えのよさを感得した段階で教師が「頭文字を線でつなぐ」考えのよさを問う活動を行うと，表の縦と横を対応させて考える表の仕組みに寄与し，「表に表す」考えのよさに気付くようになる。

仮説６　考えが出そろった段階で教師が「表に表す」考えと「１つをもとにして順に書き出す」考えや「頭文字を線でつなぐ考え」のそれぞれの関係を問う活動を行うと，各々の考えを振り返り，表現のよさに気付くことができるようになる。

授業の様子は，ビデオカメラ３台で（教室全体，個別対象児童２名）記録し，トランスクリプトにした。また，子どものノートのコピーも行った。分析においては，学習の高まりの様子を，質的に分析した。とりわけ，「基本的な授業過程」に即して分析するとともに，「問題の解決方法の共有化」ができたかどうか，さらにこれに寄与した「教師の活動」「社会的相互作用」「表現方法」の検討を行った。

４．２　「基本的な授業過程」に沿った第１時の検討

第１時の授業を基本的な授業過程に沿って検討する。

（１）意識化の段階

教師は，日常生活でのアイスクリームを買う場面を想起させ，問題状況へ子どもを誘いながら，次の問題を提示した。「白桃，マスカット，ピオーネ，ジャージー牛乳の４種類のアイスクリームがあります。このうち２種類を選んで買います。組み合わせを全部かきましょう。」

ここで教師は，「ピオーネとピオーネの買い方はどうですか」「他の組み合わせはどうですか。もうこれくらいですか」「（ピオーネ－マスカットが既出の状態で）マスカットとピオーネはどうですか」などと問い，子どもから「２種類選ぶのだから，それはだめです。それは１種類しか買っていません」「まだ全部出ていません。問題は全部書きましょうになっています」「順番変わっただけです。マスカットとピオーネはもう出ています」といった言葉を引き出した。その後，具体的事例に則して，「落ち」と「重なり」という言葉を示し，その意味を伝えた。こうしたやりとりの後，子ども達から次のめあてが述べられた：「重なりや落ちに気をつけて，全部の組み合わせを考えよう」。

（２）個別解決と小集団の段階

各自，ノートに自分の考えを書いていった。子ども達が書いていた考え方は，次のようなものであった。

A 全部バラバラに書き出す

B 一つを決めて，全てを書き出そうとする

C 樹形図を使う

D マスカットをマのように，頭文字を使う

E アルファベットや数字に置き換えて書き出す

F 横に並べて，線で結ぶ

G 四角形状に並べ，対角線と辺の数で調べる
H 表を作る
自力解決の後，教師は近くにいる人と，自分の考えと同じか違うか，質問しあうこと，どこが同じでどこが違うかを考えるよう要請した。例えば，「白桃のときは，マスカット，ピオーネ，ジャージー牛乳の組み合わせができて，マスカットのときは，白桃，ピオーネ，ジャージー牛乳の組み合わせになるけど，重なるので，これは使えないから，既に使ったものはやめて書き出していく」といった考えが互いに交わされていた。

すべての組み合わせを語る上で，話が長くなり，聞く側にとって十分に理解できない状況が生まれていたが，逆にこのことが，場合の数を整理する原動力にもなっていく。

（3）反省化

まず，すべてを書き出す考えが出される。この児童は，落ちや重なりを考えつつ，自分の考えを一生懸命述べたが，とても長い文章になり，他の児童は何を話しているのか分かりづらかった。そこで教師は，「整理してみましょう」と提案し，なぜピオーネとマスカットを選んだ後に，またピオーネから始まる組み合わせにしたのかと問うた。子ども達は「そうしないとわかりにくい。片方を同じにします」と述べた。「最初を揃えて書く」という考えがここから共有され始めた。

さらに，次にマスカットを必ず選ぶ選び方を考える際に，ある児童が，「マスカットとピオーネ」を選んだが，これに対して，「重なっているからダメです」という意見があがるものの，「一応書きます。重なっているから線で消します」という考えを述べ，これに基づいて，一応書きだした上で線で消すというやり方で行うことになった。最終的に，図5のような板書になる。

ピオーネ－マスカット	~~ジャージー牛乳－ピオーネ~~
ピオーネ－ジャージー牛乳	~~ジャージー牛乳－マスカット~~
ピオーネ－白桃	ジャージー牛乳－白桃
~~マスカット－ピオーネ~~	~~白桃－ピオーネ~~
マスカット－ジャージー牛乳	~~白桃－マスカット~~
マスカット－白桃	~~白桃－ジャージー牛乳~~

図5　板書1

ここで，全部で6通りあることが確認されるとともに，教師は再度，何が大事だったかを確認した。子どもは，次のように答えることができていた。

C：「重なりに気をつけました。」
C：「全部書きました... 一種類ずつ基準にしたら，一つ一つ3種類ずつ書いて，そこから消しているからです。1回全部の組み合わせを書いて消しているので，落ちはありません。」
　一つを決めるよさや，落ちや重なりのない数え方が身についていると考えられる。

次に，頭文字を使って簡略化し，樹形図にするアイデアが出された（白桃は白，マスカットはマ，ピオーネはピ，ジャージー牛乳はジ）。

C：「白からマへ，線でつなぎました。これで一つの組み合わせです。それから白からピ，白からジへ繋げました...（中略）ここから消していきます。マとピ，マと白，ジとマ，ジと白，ピとジ，ピと白。3通りと，あと一つずつ。3＋1＋1＋1」

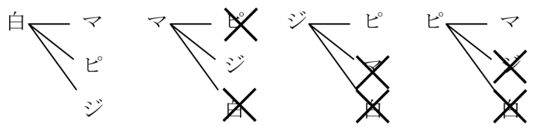


図6　板書2

教師は，「先ほどの3＋2＋1と違いましたね」と数え方にも目を向けさせた。「消し方が違います」という発言の後，「私は消さずにやりました。まず私はピオーネのグループを考えました。そこで3通り出たけど，次の白桃のグループを考えたときは，もうピオーネのグループのことを考えているから，そこに白桃，ピオーネのグループを入れないで2種類だけ書きます」のように，最初から重なりがないように数える数え方もだされた。

教師は再度，落ちや重なりを意識させようと，故意に間違った考えを提示した。「先生が書いたのですが，これも6通りになっているのですが」

マスカット－ピオーネ
ジャージー牛乳－白桃
ピオーネ－ジャージー牛乳
マスカット－白桃
マスカット－ジャージー牛乳
白桃－マスカット

図7　板書3

子ども達は「いけないと思います。バラバラです」「マスカットと白桃，下の方に白桃とマスカットがあります。重なりがあります」「ピオーネと白桃がありません。落ちがあります」と反応できていた。

（4）協定化

教師は最後に各自まとめを書かせた後，まとめを４人の児童に発表させた。皆，同様の考えを述べた。たとえば，次の意見であった。

C：組み合わせを考えるときは，まず１つを決めることが大切です。それによって，落ちや重なりをなくすことができます。

１つを決めて数えていく数え方は，この一時間でかなり定着した。しかし，場合の数の授業では，こうした考えとともに，表現のよさを認識することも重要である。この一時間では，表現のよさにまでは，十分に認識が及んでいない。これが第２時の課題となった。

４．３　基本的な授業過程に沿った第２時の検討

ここでは，第２時の授業を検討していく。

（1）意識化の段階

教師は，前時に４種類の中から２種類を選び出す組み合わせを考えたことを確認し，新たにキビダンゴ味を登場させ，次の問題を提示した。「白桃，マスカット，ピオーネ，ジャージー牛乳，キビダンゴ味の５種類のアイスクリームがあります。このうち２種類を選んで買います。組み合わせを全部かきましょう。」

さらに「どれくらいになりそうですか」と予想させたが，子ども達はうまく予想を立てられなかった。どうやって考えていけばよさそうかと，見通しを尋ねたところ，「落ちがなくなるように，合わせられる種類を全部書いて，それから消していきます」「重なりにも気をつけます。２つ同じ組み合わせがでないように。例えば，ピオーネ－マスカットと，マスカット－ピオーネのように」「１つを決めて考えていきます。例えば，白桃とマスカット，白桃とピオーネ，白桃とジャージー牛乳，白桃とキビダンゴのように，１つを基点として他の４種類との組み合わせを考えます」「頭文字を利用して書いていきます。白桃だったら白」のような，前時の考えが出された。子ども達は，前時の考えを意識できていることが分かる。

この後，「１つをもとにして，落ちや重なりがないように，組み合わせを考えよう」という，学習のめあてが子ども達の意見をもとにして設定された。

（2）個別解決・小集団の段階

子ども達の個別解決での考えは次のようであった。

A 全部バラバラに書き出す

B 一つを決めて，全てを書き出す

C 樹形図を使う

C－１ マスカットをマのように，頭文字を使う

C－２ アルファベットや数字に置き換える

D 横に並べて，線で結ぶ

E 四角形状に並べ，対角線と辺の数で調べる

H 表を作る

第１時との違いは，表をつくる子どもが増えていたことである。自分たちなりに，よりわかりやすい整理の仕方を考えようとした結果であると思われる。

また，小集団で，近くの人と意見交換をする際に，多角形に並べる考えや，表の考え，アルファベットの考えが主として生じていたことと，４＋３＋２＋という計算について考えている子どもも見られた。

（3）反省化の段階

まず一つを決めて樹形図で説明する考えが出された。

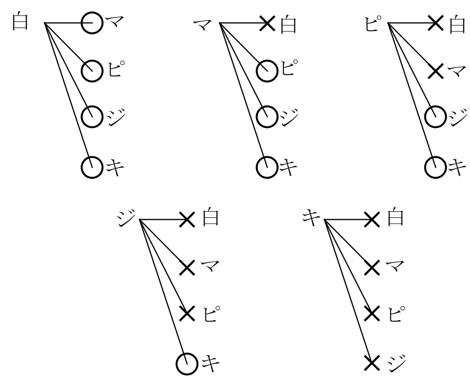


図８　板書４

「もうありませんか。どうして分かりますか」という教師の問いに，子ども達は，「５種類が全部出たので，もうありません。」のように答えていた。また，「マスカットと白桃は，白桃をもとにした時に使っています。白桃－マスカットと同じです。」「重なりです。重なりは消します。」と，重なりについても言及できている。

さらに，「何通りありましたか」という問いに，「４＋３＋２＋１の10通りある」と答え，考え方として，「１つをもとにして考える」考え方の重要性が確認された。

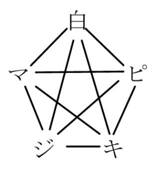


図９　板書５

次に，五角形に並べ線でつなぐ考えが発表された。ここでも子ども達は，「まず白桃は，ピ，キ，ジ，マ

の４通り。次に，ピオーネは，白はでているので，マ，キ，ジの３通り。次に，キビダンゴは，白とピとはつながっているから，マとジに線を引く。最後に，ジとマをつなぎます。」のように，一つを固定して数える数え方を採用していた。

教師から「こちらと同じような説明はできますか」という問いかけに対して，「白桃から４通りの線が出ていて，次にピオーネからも４通りあります。でも既に白とピはつながっているので，その線を消します...」のように，すべて書き出してから消す方法を，五角形の図で解釈することができた。さらに，五角形の説明に対して，「もう無理ですというのがわかりやすい」「落ちがないのがわかりやすい」「重なりがないのもわかりやすいと思います。すでにつながっているところは数えなくていい。」「線もあまりごちゃごちゃしていないから間違えずにできると思います」と感想を述べた。

表現としては違うように見えても，数え方が同じに解釈できることを見いだすとともに，表現のよさにまで言及することができていた。

次に，表の考えが出された。

	白	マ	ピ	ジ	キ
白					
マ	○				
ピ	○	○			
ジ	○	○	○		
キ	○	○	○	○	

図10　板書６

児童の発表では，単に答えの10通りを見つけるだけでなく，表現の特徴に関する意見が含まれるようになってきた。

Ｃ：縦と横で組み合わせがわかります。左上から右下へ，一本の線を引いて，同じ種類を選ぶのを防ぎます。例えば，白桃と白桃。重なりを防いでいる。

教師は，表の特徴をさらに探究させようと，ここでペア学習（小集団）を取り入れた。この学習では，「重なりがあるので，出した半分を上からやっていった場合，下のところにキビダンゴとピオーネっていうペアがあるので，下のところを消していったら出ます。」「右半分に書いて左半分に書かないとか」のような，表の特徴やよさに関する意見が出ていた。クラス全体での話し合いに戻った後，次の会話が展開された。

Ｃ：まず，白桃をもとにして考えたら，白桃以外のこの４種類が○になります。次はマスカットをもとにします。白桃はここととここでつながりを考えたので，ここに斜線を引きます。ここ以外の３つに○をします。...　次は，ピオーネ－ジャージー牛乳，ピオーネ－キビダンゴ。最後は，ジャージー牛乳－キビダンゴです。

Ｔ：このやり方のよいところはどこですか。

Ｃ：真ん中の線で右のところが消せます。

Ｃ：重なりがどれくらいあるかがわかります。

Ｃ：落ちがないのも，よくわかります。

教師は，これらの考えを共有させる為に，もう一度小集団学習を取り入れて，話し合いを持たせた。

最後に，教師は３つの考え方の似ているところや異なることを考えさせた。

Ｃ：１番と３番は全部書きだすと，落ちはないけれど，２番は，もし数が増えると線の数も増えるから，落ちとか重なりを間違えるかもしれない。

Ｃ：１と３はすべてのパターンをだしているからわかりやすい。

Ｃ：どれも落ちや重なりを防いでいる。１つずつ決めてやっている。

Ｃ：１は重なりを考えるのが大変。ごちゃごちゃする。２はすでにつないであるので，重なりがわかりやすい。

Ｃ：２は線の数で，何通りかがわかる。

Ｃ：３は右と左で○と斜線の部分の数が同じなので，計算ができそうです。それぞれ４種類ずつあるので，それが５個あるから，○と斜線の数は全部で20個で，４×５で出ます。右と左の数が同じなので，２で割ります。４×５÷２です。

最終的には，表現のよさの認識にまで学習が進むとともに，計算の仕方への芽生えも出てきていた。

（４）協定化の段階

最後に教師は，「結局，組み合わせを考えるときに，どんなことを大切にするとよかったですか」と問うと，「１つをもとにすること」「重なりや落ちがないように，全部を書き出すこと」のような意見が出た。これは，授業開始時の子ども達の意見でもあるが，同質のものというより，そこには質の向上が見られると考えられる。すなわち，子ども達は授業開始時で既に，一つをもとにして数えることの意義やよさを感じてい

たが，表現のよさまでは感じ取れていなかった。しかし，第２時の授業では，多様な表現を通して，一つをもとに数える，という意味がいっそう明確になり，表現自体を自分たちの道具にすることができた。言い換えれば，一つをもとにして数えるという考えが，いくつかの表現を通して活用できる状態になったと考えられる。その意味で，授業開始時と授業終了時の間で，子ども達の思考が向上したと捉えることができると考える。

４．４　仮説の検証

こうした２時間の授業を実施する前に立てた仮説の点から，授業の検証について述べていく。

第１時の授業に関する仮説１は，「教師が落ちや重なりの確認を行うと，すべてを書き出し，重なりを消す考えにつながる」というものであった。これは仮説通り機能したが，より正確に言えば，最初から重なりを考えないように書き出す仕方と，すべてを書き出した後に重なりを消す書き方があって，それらが同じことであると確認する社会的相互作用によって実現されたと言える。仮説２，３については，教師が意図的に指導しなくても，子どもの方でかなりの程度認識できていたと考えられる。

第２時の授業に関する仮説４については，一つをもとに数え上げる仕方は既に第１時で定着していた。表のよさの認識に関わる仮説５では，それまでの順序よく数える数え方が，五角形を線で結ぶ考えや，表の仕組みの認識へ転移する姿が見られた。すなわち，図形的表現や表には，落ちや重なりを防ぐ仕組みが備わっているというものである。またこれと関連して，仮説６に関しては，出された表現のよさを振り返ることにより，落ちや重なりをそれぞれどのように防いでいるかを，子ども達は述べていた。

仮説１，５，６はおおむね仮説通りで，その他の仮説は子ども達から自然な形で達成されていたと言える。

４．５　各段階における重要な社会的相互作用

上記の「基本的な授業過程」の各段階において，重要であったと考えられる社会的相互作用を，Ａ：他者との相互作用，Ｂ：自己との相互作用，Ｃ：表現等との相互作用の３つの点から吟味してみたい。

まず，意識化の段階の社会的相互作用に関しては，他者との相互作用に関して，「一つの場合とは何か，落ち，重なりとは何か」について考えを共有することが重要であった。そのため教師は，これに該当しない例（負事例）を多用して，その捉え方を顕在化しようとした。また，子ども達もそのことを十分に共有できていた。

また，どうすれば落ちや重なりがないように数えられるかを自問自答する様子がうかがえ，この点で，自己との相互作用が生じており，さらには，対応を明確にする為に線でつなぐという考えから，表現との相互作用も行われていたと考えられる。

個別解決，小集団の段階での社会的相互作用としては，「落ちや重なりのない数え方を工夫する」（自己との相互作用），「線の引き方や図への表し方」を工夫する（表現との相互作用）から，「友達の考え方や表現の仕方を理解し，共有する」（他者との相互作用）へと，進んで行っている様子が見られた。

反省化の段階では，「他者の考えの特徴やよさ・限界についてふりかえる」（他者との相互作用），「全て同じ考えで捉えられることや，一般化可能性について考えてみる」（自己との相互作用），さらに「表現の特徴や限界を整理し，よさの視点から表現を見直す」（表現との相互作用）が，いずれも生じていたことが観察できた。

協定化の段階の社会的相互作用では，「全ての表現を，まず一つを決めて数える数え方として統一的に見る」（表現との相互作用）が中心的であったが，この相互作用は，自己との相互作用や他者との活発な相互作用に支えられていることは明らかであり，それらの総合的な相互作用の様相が発生していたと考えられる。

４．６　反省化の段階における認識の高まりの様相

子ども達の考えの進展を見るならば，最初は，落ちや重なりなく数え上げる為に，一つを固定して数えていく考えからスタートした。ここでは，すべてを書き出した上で，重なりを消していくという作業がなされたが，これは落ちや重なりを防ぐ最初の工夫であったと捉えることができる。

次には，頭文字を利用して簡略化するとともに，固定した一つから他のペアへのつながりが明確化されるように，線のつなぎ方が樹形図的になってきた。

さらに，図形的に（五角形で）表現し，線のつなぎ方をより明確化するとともに，その表現を，一つをもとにして数える数え方，すべてを書き出した上で重なりを消す考え方の視点から再解釈し，表現を統一的に見ることができるようになった。

最後に，表の考えが出たが，ここでは落ちや重なり

を防ぐ工夫が，表の中に備わっていることへの気づきが生まれていたことが注目される。もう一つ注目したいことは，数え上げる為の計算の仕方に目が向き，計算の仕方が提案されたことである。これは落ちや重なりなく数え上げるという学習のめあてから見て，それを越えた考え方と見ることができ，いわゆる創発的な現象であると思われる。

以上の点を，先の枠組みで示した個別的解決，準一般的解決，一般的解決の視点から見てみる。

子ども達による個別的解決は，表現の一般性への気づきに向かったと考えられる。例えば樹形図の考えは，落ちや重なりを防ぎつつ，一つをもとにして数える上で有効な表現であり，これが今回の授業では４種類や５種類であったが，６種類から選ぶ場合，７種類から選ぶ場合へ，子ども達は容易に一般化できる状態に達したと推測できる。この認識は準一般的な解決の様相であると考えられる。また，この授業では数を文字で置くような一般化の場面はなかったが，組み合わせの総数を式で表す考えが出てきており，この考え方は具体的な場面を越えて，一般的に場面を捉え直す姿であるように思われる。まとめれば，表現と表現の相互作用を通して，アイデアが明確になり，表現の見方を工夫しながら，個別的，準一般的，一般的，というプロセスによる一般化が行われることが示唆された。

ただし，最後の式づくりについては，今回の授業づくりでは，教師側は事前に扱うことを計画しておらず，従って子ども達のアイデアを明確化することができていない。こうした子ども達からの創発を捉えて，授業にどう位置づけていくかが今後の課題となる。

５．おわりに

本稿で検討した規範的モデルの有効性は以下のように整理することができる。

まず，意識化，自力解決・小集団，反省化，協定化というプロセスが，子ども達の場合の数の認識に有効に寄与していたことが示された。とりわけ小集団の活動が，このプロセスを活性化する様子が見られた。また，反省化の段階で，個別的，準一般的，一般的のプロセスが生じることが示された。

社会的相互作用に関しては，①落ちや重なりなど，前提の共有の為の相互作用，②自分なりの考えをもち，自分なりの表現の工夫を行う自己や表現との相互作用，③他者と共有する為の相互作用，④他者の考えのよさと限界について振り返る相互作用，⑤共通の性質を見いだし，一般化する相互作用，⑥表現間の共通性，よさ，限界を見いだす相互作用が生じていた。

表現に関しては，一つを固定して数え上げる，という認識をもとにしながら，落ちや重なりを防ぐため，線で結ぶ，重なりを消す，頭文字にする，図形的表現にするなどの，工夫が生じていた。さらには，表現自体に，落ちや重なりを防ぐ工夫が備わっている，という認識を持ち，それらを道具化する様相が見られた。

以上のことはいずれも本研究で構築した規範的モデルの有効性を示すものと考える。

今後の課題は，このモデルに基づく授業づくり，授業実践をさらに進め，モデルの有効性をより一般的に検証するとともに，それを通して必要な微修正をしてモデルの最終版を完成させることである。

［謝辞］本研究はJSPS科研費　23330268の助成を受けてすすめられた研究成果の一部である。

引用・参考文献

中原忠男（1995），算数・数学教育における構成的アプローチの研究，聖文社.

中原忠男（1999），数学教育における構成主義的授業論の研究（Ⅱ）－「数学学習の多世界パラダイム」の提唱－，全国数学教育学会，数学教育学研究，５，１－８.

中原忠男ほか（2012），多世界パラダイムに基づく算数授業における社会的相互作用の規範的モデルの研究（Ⅰ）－規範的モデルの第１次案－，日本数学教育学会，第45回数学教育論文発表会論文集，779-784.

日本数学教育学会（2012），日本数学教育学会誌，第94回総会特集号.

前田一誠（2010），対話学習を中核に据えた授業づくり－第５学年「円」の指導を通して，学校教育，No.1119，24-31.

Cobb, P. (1994), Where is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Education. *Educational Researcher*, 23 (７), 13-20.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, LEA: Hillsdale.