# 位相空間と微分空間のホモトピー群について

## The homotopy groups of Topological and Diffeological spaces

次世代教育学部教育経営学科
原口　忠之
HARAGUCHI, Tadayuki
Department of Educational Administration
Faculty of Education for Future Generations

**キーワード**：ホモトピー群，位相空間，微分空間

**Abstract**：Let Top and Diff be the categories of topological and diffeological spaces, respectively. Then there is a functor D : Top → Diff which maps a topological space X to the diffeological space DX.

We define the homotopy groups of topological and diffeological spaces, respectively.

In this paper we shall show that $\pi_n(X, x)$ and $\pi_n(DX, x)$ are isomorphic, where X is a topological space.

この論文では, 位相空間におけるホモトピー群と微分空間におけるホモトピー群の比較を行う。

位相空間と微分空間とは異なる空間であるが, 位相空間から，微分空間を導入することができ，反対に微分空間から，位相空間を導入することもできる。ここでは､位相空間から誘導された微分空間におけるホモトピー群と, もとの位相空間におけるホモトピー群は同型であることを証明する。これが一番の目的である。

微分空間という分野は, Zemmour により定式化された分野であるが, 微分空間の定義のアイデアは J.M. Souriau の論文[4]と[5]に掲載されている。

この論文では, まず位相空間と微分空間を定義して, それらの圏の間の関手を与える。次に位相空間，微分空間におけるホモトピー群をそれぞれ定め, 最後に主定理を証明する。

定義１　X を集合とし，X の部分集合族を G と表す。このとき、次の３つの条件を満たすとき，（X, G）を位相空間とよび，G を X の位相とよぶ。また，G に属する集合を，X の開集合とよぶ。

G1 : X と空集合 $\emptyset$ は共に，G に属する。

G2 : G に属する有限個の A に対して，$\cap A$ も G に属する。

G3 : G に属する任意個の B に対して，$\cup B$ も G に属する。

定義２　X と Y を位相空間とする。$f : X \to Y$ が連続写像であるとは，Y の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ が X の開集合になるときをいう。明らかに連続写像の合成写像は連続写像である。

定義１と定義２によって，対象を位相空間とし，射を連続写像とする圏を定めることができる。この圏をここでは，Top と表す。

定義３　X を集合とし, 任意の n 次元ユークリッド空間の開集合から X への写像からなる集合を D とする。このとき，次の３つの条件を満たすとき，（X, D）を微分空間とよび，D を X の微分構造とよぶ。また，D の任意の元を X のプロットとよぶ。

D1 : 任意の $x \in X$ と任意の 0 以上の整数 n に対して， x への定置写像 $C : \mathbb{R}^n \to X$ は D の元になっている。

D2 : ユークリッド空間の任意の開集合 U から X への写像 $P : U \to X$ に対して, U の任意の元 r に対して，r の開近傍 V が存在して，$P|V$ が D の元であるならば，P も D の元である。

D3: D の任意の元 $P : U \to X$ とユークリッド空間の開集合の間の無限回微分可能写像 $Q : W \to U$ に対して，$P \circ Q$ は D の元になっている。

微分空間の一つの例として，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の微分構造を考える。任意のユークリッド空間の開集合から $\mathbb{R}^n$ への無限回微分可能写像全体からなる集

合を $D_{\mathbb{R}^n}$ と定めると，明らかに，微分構造の条件 D1～D3 を満たすことが分かる。これにより，微分空間（$\mathbb{R}^n$，$D_{\mathbb{R}^n}$）を考えることができる。この微分空間を標準微分空間とよび。今後、$\mathbb{R}^n$ には，この微分構造が導入されていると考える。

定義 4　X と Y を微分空間とする。$f:X \to Y$ が滑らかな写像であるとは，X の任意のプロット $P:U \to X$ に対して，$f\circ P:U \to Y$ が Y のプロットになっているときをいう。定義から明らかに滑らかな写像の合成写像は滑らかな写像である。

定義 3 と定義 4 により，対象を微分空間，射を滑らかな写像からなる圏を定義することができる。この圏をここでは，Diff と書く。圏 Top と圏 Diff の間には関手が存在することが知られている。今からこれについて，触れたいと思う。次の補題 5 は定義から明らかに成り立つので証明は省く。

補題 5　（X, G）を位相空間とする。このとき，D(G) を任意のユークリッド空間の開集合から X への連続写像全体からなる集合とするとき，（X, D(G)）は微分空間となる。これを DX と書く。

補題 6　X と Y を位相空間とし，$f:X \to Y$ を連続写像とする。このとき，$D(f):DX \to DY$ は滑らかな写像になる。

Proof　X の任意のプロット $P:U \to DX$ に対して，P は連続写像であり，f も連続写像であるので，$f\circ P:U \to Y$ も連続写像になる。よって，$f\circ P$ は Y のプロットになる。したがって，D(f)は滑らかな写像になる。　□

補題 4 と補題 5 によって，位相空間 X を微分空間 DX に，連続写像 $f:X \to Y$ を滑らかな写像 $D(f):DX \to DY$ と定めることで，圏 Top から圏 Diff への関手 $D:\mathrm{Top} \to \mathrm{Diff}$ を定めることができる。

次に位相空間におけるホモトピー群を定義する。X, Y を位相空間とし，区間 $I=[0,1]$ を $\mathbb{R}$ の部分空間とする。このとき，連続写像 $h, g:X \to Y$ がホモトピックであるとは，ある連続写像 $H:X\times I \to Y$ が存在して，$H(x,0)=h(x)$, $H(x,1)=g(x)$ が成り立つときをいう。このとき，$h\simeq g$ とかき，H をホモトピーとよぶ。さらに，この H が

$$H(0,t)=h(0)=g(0),\ H(1,t)=h(1)=g(1)$$

を満たすとき，h と g は端点をとめてホモトピックであるといい，$h\simeq g\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$とかく。

いま，$h\simeq g\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$を $h\sim g$ と定めると関係 ～ は同値関係となる。n を 0 以上の整数とする。ここで，

$$\Omega(X,x)=\{f:I^n\to X \mid f(\partial I^n)=\{x\}\}$$

と定め $\Omega(X,x)$ を同値関係 $\simeq(\mathrm{rel}\ \dot{I})$ で類別した商集合を $\pi_n(X,x)$ であらわす。つまり，

$$\pi_n(X,x)=\Omega(X,x)/\simeq(\mathrm{rel}\ \dot{I})$$

である。任意の連続写像 $f, g: I^n\to X$ に対して，$f*g: I^n\to X$ を

$$f*g(t_1,t_2,\cdots t_n)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\cdots t_n) & 0\le t_1\le \dfrac{1}{2}\\ g(2t_1-1,t_2,\cdots t_n) & \dfrac{1}{2}\le t_1\le 1\end{cases}$$

と定めると連続写像になる。このとき，$f*g(\partial I^n)=\{x\}$ は明らかより，$f*g\in\Omega(X,x)$となる。いま$\pi_n(X,x)$の演算を，任意の$[f], [g]\in\pi_n(X,x)$ に対して，

$$[f][g]=[f*g]$$

と定める。このとき，矛盾なく定義されていることがわかり，また群構造を満たすことも証明することができる。これらのことから，位相空間 X のホモトピー群 $\pi_n(X,x)$ を定義することができた。

次に，微分空間におけるホモトピー群を定義する。X, Y を微分空間とする。このとき，滑らかな写像 $f, g:X \to Y$ がホモトピックであるとは，ある滑らかな写像 $H:X\times\mathbb{R} \to Y$ が存在して，$H(x,0)=h(x)$, $H(x,1)=g(x)$ が成り立つときをいう。このとき，$h\simeq g$ とかき，H をホモトピーとよぶ。さらに，この H が

$$H(0,t)=h(0)=g(0),\ H(1,t)=h(1)=g(1)$$

を満たすとき，h と g は端点をとめてホモトピックであるといい，$h\simeq g\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$とかく。

ここで，ε は 0 より大きな十分小さな値とする。[2] により，次の条件を満たすような滑らかな写像 $\lambda_\varepsilon:\mathbb{R}\to I$ が存在することが知られている。この写像をスマッシュ関手と呼ぶ。

$$\lambda_\varepsilon((-\infty,\varepsilon])=\{0\},\ \lambda_\varepsilon([1-\varepsilon))=\{1\}$$

であり，区間$[\varepsilon,1-\varepsilon]$では，$\lambda_\varepsilon$は単調増加する。

命題 7　X, Y を微分空間とする。$f, g:X \to Y$ を滑らかな写像とする。このとき，$f\simeq g\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$ を $f\sim g$ と定めると，関係 ～ は同値関係となる。

Proof　反射律と対象律を満たすことは明らかより，推移律を満たせばよい。$f\simeq g\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$，$g\simeq h\ (\mathrm{rel}\ \dot{I})$ とすると，あるホモトピー $H, H':X\times\mathbb{R}\to Y$ が存在して，

$$H(x,0)=f(x),\ H(x,1)=g(x)$$
$$H'(x,0)=g(x),\ H'(x,1)=h(x)$$
が成り立つ。いま，$H'': X \times \mathbb{R} \to Y$を
$$H''(x,t)=\begin{cases} H(x,\lambda_\varepsilon(2t)) & t \le \frac{1}{2} \\ H'(x,\lambda_\varepsilon(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \end{cases}$$
と定めると，$H''$は滑らかな写像であり
$$H''(x,0)=f(x),\ H''(x,1)=h(x)$$
$$H''(0,t)=f(0)=h(0),\ H''(1,t)=f(1)=h(1)$$
をみたす。よって $f \simeq h$ (rel $\dot{I}$) が成り立つ。したがって，関係 $\sim$ は同値関係となる。 □

いま，
$$\Omega'(X,x)=\left\{f: \mathbb{R}^n \to X \middle| f(\partial I^n)=\{x\}\right\}$$
と定め $\Omega'(X,x)$ を同値関係 $\simeq$ (rel $\dot{I}$) で類別した商集合を $\pi_n(X,x)$ で表す。つまり
$$\pi_n(X,x)=\Omega'(X,x)/\simeq (\mathrm{rel}\ \dot{I})$$
である。

ここで，任意の滑らかな写像 $f,g: \mathbb{R}^n \to X$ を
$$f*g(t_1,t_2,\cdots t_n)=\begin{cases} f(\lambda_\varepsilon(2t_1),t_2,\cdots t_n) & t_1 \le \dfrac{1}{2} \\ g(\lambda_\varepsilon(2t_1-1),t_2,\cdots t_n) & \dfrac{1}{2} \le t_1 \end{cases}$$
と定めると，滑らかな写像となる。このとき，明らかに $f*g(\partial I^n)=\{x\}$ となる。したがって，$f*g \in \Omega'(X,x)$ となる。$\pi_n(X,x)$ の演算を任意の$[f]$, $[g] \in \pi_n(X,x)$ に対して，
$$[f][g]=[f*g]$$
と定める。このとき，矛盾なく定義されていることがわかり，また群構造を満たすことも証明することができる。これらのことから，微分空間 X のホモトピー群 $\pi_n(X,x)$ を定義することができた。

補題８　X を位相空間とし，$g: I^n \to X$を連続写像，$f: \mathbb{R}^n \to DX$ を滑らかな写像とする。このとき，$DT(f)\circ\lambda=f\circ\lambda$であり，$f \simeq f\circ\lambda$ が成り立つ。また，$1_X \circ TD(g)=g$ であり，$g \simeq g\circ T(\lambda)|_{I^n}$ が成り立つ。ただし，$1_X: TDX \to X$ とする。

Proof　$H: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to DX$を
$$H(t,s)=f(s\lambda(t)+(1-s)t)$$
と定める。このとき，
$$H(t,0)=f(t),\ H(t,1)=f\circ\lambda(t)$$
を満たす。したがって，$f \simeq f\circ\lambda$が成り立つ。
$g \simeq g\circ T(\lambda)|_{I^n}$ についても同様である。

定理９　X を位相空間とし，n を 0 以上の整数とする。このとき，$\pi_n(X,x)$ と$\pi_n(DX,x)$ は群として，同型である。

Proof　$\varphi: \pi_n(DX,x) \to \pi_n(X,x)$ を任意の $[f] \in \pi_n(DX,x)$ に対して，$\varphi([f])=[1_X\circ T(f)|_{I^n}]$と定める。ただし，$1_X: TDX \to X$ とする。まず，最初に $\varphi$ が準同型写像であることを示す。
$$\begin{aligned}\varphi([f][g]) &= \varphi([f*g]) \\ &= 1_X\circ(T(f)*T(g)) \\ &= (1_X\circ T(f))*(1_X\circ T(g)) \\ &= \varphi([f])\varphi([g])\end{aligned}$$
が成り立つ。したがって，$\varphi$ は準同型写像である。

次に，$\varphi$ は全射であることを示す。任意の $[g] \in \pi_n(X,x)$ に対して，$g: I^n \to X$ は連続である。さらに，$\lambda_\varepsilon^n: \mathbb{R}^n \to DI^n$ は滑らかな写像であり，$D(g)\circ\lambda_\varepsilon^n: \mathbb{R}^n \to DX$ は滑らかな写像となる。よって，$[D(g)\circ\lambda_\varepsilon^n] \in \pi_n(DX,x)$ であり，補題８に注意すると，
$$\begin{aligned}\varphi([D(g)\circ\lambda]) &= [1_X\circ TD(g)\circ T(\lambda)|_{I^n}] \\ &= [g\circ T(\lambda)|_{I^n}] \\ &= [g]\end{aligned}$$
が成り立つ。したがって，$\varphi$ は全射である。

次に，$\varphi$ が単射であることを示す。任意の $[f]$, $[g] \in \pi_n(DX,x)$ に対して，$\varphi([f])=\varphi([g])$ とする。このとき，
$$[1_X\circ T(f)|_{I^n}]=[1_X\circ T(g)|_{I^n}]$$
が成り立つ。よって，あるホモトピー $H: I^n\times I \to X$ が存在して，
$$H(x,0)=1_X\circ T(f)|_{I^n},\ H(x,1)=1_X\circ T(g)|_{I^n}$$
が成り立つ。$DH: DI^n\times DI \to DX$ は滑らかな写像であり，$\lambda_\varepsilon^{n+1}: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to DI^n\times DI$ も滑らかな写像である。よって，$DH\circ\lambda_\varepsilon^{n+1}: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to DX$ は滑らかな写像である。このとき，
$$DH\circ\lambda_\varepsilon^{n+1}(t,0)=D(1_X)\circ DT(f)|_{I^n}\circ\lambda_\varepsilon^n(x)$$
$$DH\circ\lambda_\varepsilon^{n+1}(t,1)=D(1_X)\circ DT(g)|_{I^n}\circ\lambda_\varepsilon^n(x)$$
が成り立つ。補題８に注意すると，
$$DH\circ\lambda_\varepsilon^{n+1}(t,0)=f\circ\lambda_\varepsilon^n(t),\ DH\circ\lambda_\varepsilon^{n+1}(t,1)=f\circ\lambda_\varepsilon^n(t)$$
が成り立つ。したがって，$f\circ\lambda_\varepsilon^n \simeq g\circ\lambda_\varepsilon^n$であり，補題８より，
$$f \simeq f\circ\lambda_\varepsilon^n \simeq g\circ\lambda_\varepsilon^n \simeq g$$
を満たすので，$[f]=[g]$ が成り立つ。よって，$\varphi$ は単射となる。これらのことから，$\varphi$ は同型写像であることがわかった。したがって，$\pi_n(X,x)$ と$\pi_n(DX,x)$ は群として，同型である。 □

**Remark** ここではふれなかったが，位相空間 X の特異ホモロジー群 $H_n(X)$，特異コホモロジー群 $H^n(X)$ を定義できることが，知られている。さらに，微分空間 X の特異ホモロジー群 $H_n(X)$，特異コホモロジー群 $H^n(X)$ を定義することができる。このとき，X を位相空間とするとき，$H_n(X)$ と $H_n(DX)$ は同型であり，同様に $H^n(X)$ と $H^n(DX)$ は同型であると予想できる。これらのことは今後の研究課題である。

## References


[1] E. H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York (1966).

[2] Guillemin, Pollack. Differential Topology. Prentice-Hall (1974).

[3] Hatcher, Allen (2002), Algebraic Topology, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-79540-1.

[4] J. M. Souriau. Groupes différentiels. In Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf, Aix-en-Provence/Salamanca, 1979). volume 836 of Lecture Notes in Math. pages 91–128. Springer, Berlin, 1980.
In Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf, Aix-en-Provence/Salamanca, 1979).

[5] J. M. Souriau. Groupes différentiels de physique mathématique. In South Rhone seminar on geometry, II (Lyon, 1983). Travaux en Cours, pages 73–119. Hermann, Paris, 1984.

[6] J. P. May, A Concise Course in Algebraic Topology.

[7] J. P. Serre, "Homologie singuliere des espaces fibres. Applications" Ann. of Math., 54 (1951) pp. 425–505.

[8] John W. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.

[9] K. Shimakawa, K. Yoshida, and T. Haraguchi, Homology and cohomology via bifunctors, arXiv: 1010. 3336v1

[10] Mac Lane, Saunders (1998). Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics 5 (2nd ed.). Springer-Verlag. ISBN 0-387-98403-8.

[11] Mac Lane, Saunders, Birkhoff, Garrett (1999) [1967]. Algebra (2nd ed.). Chelsea. ISBN 0-8218-1646-2.

[12] P. Iglesias-Zemmour. Diffeology. (working document).